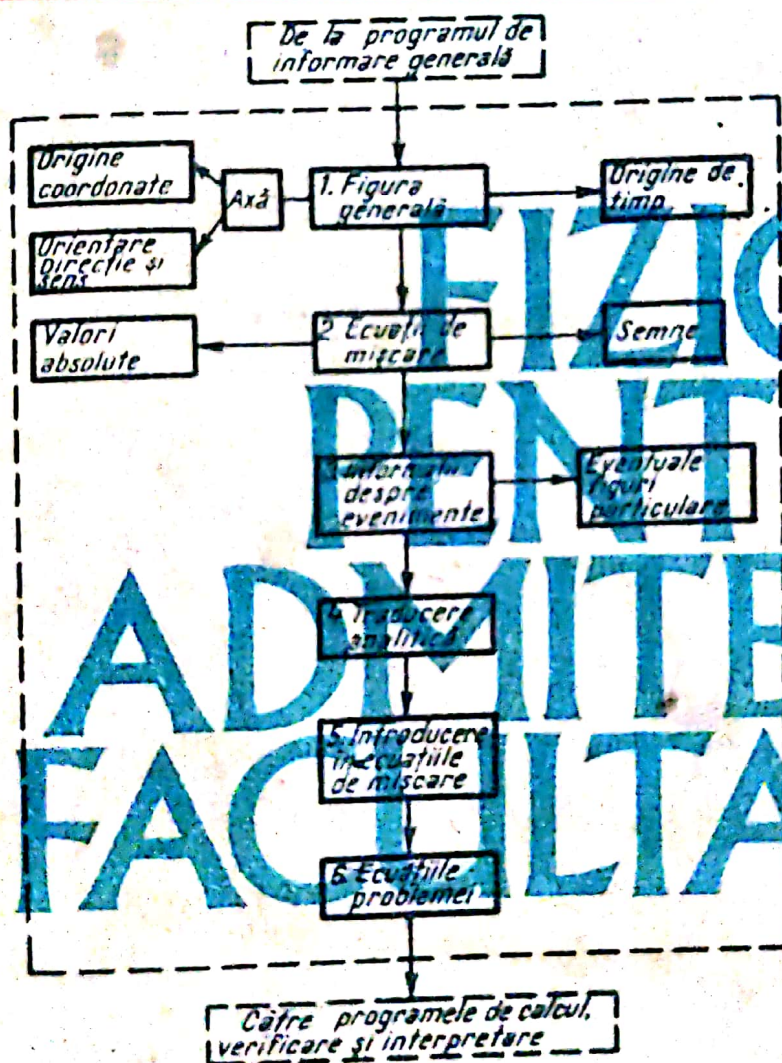




SINTEZE LYCEUM

MIHAIL ATANASIU
VICTOR DROBOTĂ



EDITURA ALBATROS



Coperta colecției:
ANDREI OLSUFIEV

BUCUREȘTI ● 1974





SINTEZE
LYCEUM

Conf. dr. ing. MIHAIL ATANASIU
Conf. dr. ing. VICTOR DROBOTĂ

FIZICĂ PENTRU ADMITERE ÎN FACULTATE

TEHNICA REZOLVĂRII PROBLEMELOR

VOLUMUL I

EDITURA ALBATROS



Lector : CALIN DIMITRIU
Tehnoredactor : GABRIELA ILIOPOLOS

*Bun de tipar 24.VI.1974. Apărut 1974.
Comanda nr. 41. Tiraj 53 500 broșate.
Coli de tipar 27,5.*

Tiparul executat sub comanda nr. 40 149
la Combinatul Poligrafic „Casa Scînteii”
Piața Scînteii nr. 1
București
Republica Socialistă România



CUPRINS

<i>CUVÎNT ÎNAINTE</i>	7
-----------------------------	---

<i>INDICAȚII ȘI RECOMANDĂRI PENTRU CÎTITOR</i>	13
--	----

Capitolul 1

NOȚIUNI DE BAZĂ

1.1. Proprietăți ordonabile. Mărimi fizice	15
1.2. Măsurarea unei mărimi fizice. Unități de măsură. Formule dimensionale	17
1.3. Fenomen fizic. Lege. Teoremă. Principiu.....	21
1.4. Poziții sau stări	31
1.5. Mărimi de stare și mărimi de proces.....	32
1.6. Metodă. Program	35
1.7. Metode monopozitionale și metode bipozitionale	37

Capitolul 2

STRUCTURA ȘI REZOLVAREA UNEI PROBLEME DE FIZICĂ

2.1. Generalități	39
2.2. Enunț	40
2.3. Informații	41
2.4. Date. Necunoscute. Cerute.....	47
2.5. Rezolvare	58
2.6. Programul general de rezolvare a unei probleme	74
2.7. Redactarea și prezentarea unei probleme.....	100

Capitolul 3

METODE GENERALE PENTRU REZOLVAREA PROBLEMELOR DE FIZICĂ

3.1. Generalități	115
3.2. Metoda ecuațiilor de mișcare.....	116
3.3. Metoda mișcării inverse.....	138
3.4. Metoda ecuației fundamentale a dinamicii.....	145
3.5. Metoda energiei	158
3.6. Metoda impulsului	178
3.7. Metoda reducerii	185
3.8. Metoda echilibrului	197
3.9. Metoda centrului maselor.....	211
3.10. Metoda pentru studiul oscilațiilor.....	219
3.11. Metoda pentru studiul echilibrului și mișcării sistemelor de scripeti	233
3.12. Metoda diagramei calorimetrice.....	249
3.13. Metoda ecuației și a transformărilor de stare....	258
3.14. Metoda transfigurării	277
3.15. Metoda superpoziției	287
3.16. Metoda teoremelor lui Kirchhoff.....	290
3.17. Metoda teoremelor lui Kirchhoff aplicată la calculul rezistenței sau capacității echivalente	305
3.18. Metoda curenților ciclici.....	319
3.19. Metoda tensiunilor între noduri.....	326
3.20. Concluzii	332

Capitolul 4

TIPURI DE PROBLEME

4.1. Generalități	333
4.2. Tipul întâi: probleme care se rezolvă prin înlocuirea directă a datelor.....	334
4.3. Tipul al doilea: probleme care se rezolvă prin transpunerea directă a informațiilor din enunț	343
4.4. Tipul al treilea: probleme care se rezolvă cu aju- torul variantelor de formule.....	355
4.5. Tipul al patrulea: probleme care se rezolvă prin aplicarea uneia sau mai multor metode fizicii	375
4.6. Tipul al cincilea: probleme cu structură complexă	395
4.7. Tipul al șaselea: probleme test.....	407
4.8. Concluzii	439

CUVÎNT ÎNAINTE

Prezenta lucrare își propune să realizeze o mai mare apropiere între părțile teoretică și aplicativă ale fizicii, înscriindu-se astfel pe linia eforturilor depuse de cadrele didactice din învățământul de toate gradele pentru traducerea în viață a hotărîrilor Plenarei Comitetului Central al Partidului Comunist Român din luna iunie 1973.

Ideea scrierii acestei cărți a apărut din dorința de a comunica tinerelor generații o serie de concluzii rezultate dintr-o experiență didactică și pedagogică acumulată în mai bine de două decenii.

În însușirea fizicii și a științelor tehnice, în general, pregătirea teoretică se desăvârșește prin aplicații de laborator și prin rezolvarea de probleme; acest ultim gen de activitate, deosebit de important, face parte integrantă din procesul instructiv-educativ al însușirii cunoștințelor din cadrul unei discipline.

Prin rezolvarea de probleme se realizează nu numai aprofundarea cunoștințelor teoretice, o sistematizare a acestora, legarea între ele, ci și o apropiere de practică, o ordonare a materialului, formarea modului de a gândi, judecata logică a celui care studiază. Se dobîndesc astfel o serie de calități care întregesc personalitatea în formare

a tinerilor ce-și aleg o profesie sau își desăvîrșesc pregătirea pentru o viitoare carieră. Prin rezolvarea de probleme se dezvoltă, de asemenea, curiozitatea tehnică și științifică, dorința de a ști cât mai multe lucruri din domeniul respectiv, crește încrederea în sine și se elimină în general tracul și emoțiile întâlnite atât de des la examene sau concursuri.

Deși această activitate constituie o etapă importantă în formarea unitară a celui ce se pregătește pentru o viitoare meserie, este de remarcat faptul că nu întotdeauna i se acordă importanța cuvenită. Este cunoscut faptul că însușirea tehnicii de rezolvare a problemelor cere timp și efort susținut. Ținînd seama de numărul mare de cunoștințe ce sînt necesare astăzi pentru formarea viitoare a unui tînăr, rezultă că această cale este dificilă și oboșitoare și mulți renunță la ea, evident în detrimentul pregătirii lor viitoare, micșorînd în consecință aportul pe care urmează să-l aducă societății.

În aparență fiecare problemă are particularitățile și modul ei de rezolvare; în realitate însă sistematizarea cunoștințelor legate de rezolvarea unei probleme prin folosirea anumitor tehnici de lucru, metode de calcul și programe și prin cunoașterea tipurilor de probleme ce pot fi întâlnite, poate face din rezolvarea de probleme o activitate plăcută, atractivă și deosebit de instructivă.

În prezenta lucrare am urmărit în mod deosebit aceste idei pentru domeniul destul de larg pe care îl prezintă fizica, la nivelul cerut de concursurile și examenele ce se susțin în ultimii ani de liceu și la admiterea în facultate.

Cunoașterea structurii unui enunț, a etapelor de rezolvare ale unei probleme, a metodelor folosite pentru stabilirea unor mărimi precum și a sistematizării tipurilor de probleme după gradul lor de dificultate conduc la

formarea gândirii logice, la însușirea unor tehnici rapide de lucru, punând ordine în cunoștințele necesare pentru o asemenea activitate.

Paralel cu dezvoltarea cunoștințelor de strictă specialitate se dobîndesc astfel și cunoștințe legate de modul de redactare și de prezentare ale unei probleme, aspecte la care candidații la diferite concursuri sînt în general deficițari. De asemenea, în cadrul etapelor de lucru cerute de rezolvarea unei probleme, deosebit de importante sînt verificarea și interpretarea rezultatelor.

Aceasta explică în general teama pe care o au mulți tineri la lucrările scrise precum și notele mai scăzute ce se obțin în acest caz, exprimarea în scris fiindu-le mult mai dificilă decît cea orală.

Ținînd seama de scopul urmărit, prezenta lucrare nu constituie un manual de fizică sau o culegere de probleme, ci o sinteză a cunoștințelor și procedeele necesare rezolvării problemelor.

Este de reținut faptul că problemele prezentate au doar scopul de a susține textul, ele constituind numai exemple de calcul.

Lucrarea se adresează celor ce au un grad mai ridicat de cunoștințe (candidaților la diverse examene, olimpiade, concursuri de admitere în învățămîntul superior); ea mai poate fi folosită însă și de studenții din învățămîntul superior tehnic, referirile cu caracter general fiindu-le și acestora de mare utilitate.

Prin modul în care a fost concepută, apreciem că această lucrare va putea fi de folos cadrelor didactice din învățămîntul mediu și chiar din institutele de învățămînt superior, deoarece din conținutul ei rezultă modul în care trebuie rezolvată, redactată și prezentată o problemă.

O importanță deosebită s-a acordat corelării cunoștințelor de fizică cu cele de matematică, folosirii cunoștin-

țelor de matematică asimilate într-o anumită etapă cu cele de fizică dobândite anterior. Acest lucru, deosebit de important, este în general neglijat, în mintea multor elevi rămânând întipărită ideea că anumite probleme de fizică se rezolvă cu un bagaj redus de cunoștințe matematice, corespunzătoare anului de studiu în care le-au fost predate. Ori, este cunoscut faptul că, la diverse concursuri, mai ales cele din ultimii ani de liceu și cele de admitere în învățământul superior, se dau probleme complexe a căror rezolvare reclamă folosirea tuturor cunoștințelor pe care le au candidații în etapa respectivă.

Ținându-se seama de pretențiile și nivelul ridicat al anumitor concursuri de fizică naționale, internaționale, olimpiade și cele de admitere în învățământul superior, am considerat utilă introducerea unui capitol care să cuprindă anumite cunoștințe speciale, frecvent întâlnite la asemenea manifestări, cunoștințe care, în general, nu sînt predate în clasă.

O caracteristică a problemelor ce se dau în ultima vreme la diverse concursuri o constituie folosirea în cadrul unei singure probleme a unor cunoștințe din mai multe capitole ale fizicii (mecanică, căldură, electricitate etc.).

Enunțurile problemelor, fie originale, fie reproduse din reviste sau lucrări de specialitate, sînt prelucrate și adaptate scopului urmărit în capitolele în care au fost prezentate ca exemple.

Din punctul de vedere al formei de prezentare lucrarea este structurată astfel: în primul volum, care conține patru capitole, sînt prezentate noțiunile fundamentale ale fizicii, bazele metodologiei de rezolvare a unei probleme precum și o clasificare a problemelor de fizică pe criteriul gradului lor de dificultate (metodă și cunoștințe).

După însușirea acestui material considerat ca fundamental, cititorul poate trece la o etapă superioară de pre-

gătire studiind materialul cuprins în cel de al doilea volum al lucrării. Aici sînt prezentate în primul capitol o serie de cunoștințe necuprinse sau tratate mult prea superficial în manuale, dar strict necesare pentru abordarea problemelor date la concursuri de prestigiu; în cel de al doilea capitol sînt prezentate o serie de probleme în care intervin calcule denumite de noi „speciale”, ce pot crea greutate din punct de vedere matematic celui ce rezolvă o problemă de fizică și este neavizat în acest sens.

AUTORII

INDICAȚII ȘI RECOMANDĂRI PENTRU CITITOR

Cititorul care va folosi această lucrare în scopul întregirii cunoștințelor sale în domeniul fizicii trebuie să cunoască următoarele:

Cea mai mare parte a materialului din această carte face apel la cunoștințele de matematică și fizică la nivelul predat în școala medie; problemele rezolvate prezentate în această carte fac apel foarte rar la cunoștințe peste nivelul celor de școală medie, limitându-le însă întotdeauna la cerințele impuse de unele concursuri speciale care cer aceste cunoștințe (olimpiade, concursuri internaționale etc.).

Ținând seama de scopul urmărit de lucrare, unora dintre problemele prezentate, acolo unde s-a considerat necesar, li s-a dat o rezolvare mai detaliată; faptul că unele exemple de calcul au fost plasate într-un anumit loc în cuprinsul lucrării nu exclude posibilitatea folosirii lor în același scop în altă parte a lucrării.

Unele paragrafe sau subparagrafe sînt însoțite de mai multe exemple de calcul. Uneori este necesară citirea rezolvării unei singure probleme, celorlalte putîndu-li-se încerca rezolvarea fără să mai fie necesară urmărirea textului din carte, acesta constituind după rezolvare un

ghid în vederea completării soluțiilor folosite sau a cunoașterii altor soluții.

În vederea folosirii cu succes a acestei lucrări este bine să-i fie cunoscut conținutul integral, deoarece în diversele paragrafe și subparagrafe ale lucrării referirile au uneori un caracter general, valabil pentru mai multe capitole din fizică; exemplele de calcul conțin modalități de gândire, cunoștințe matematice, artificii de calcul etc. ce pot fi folosite în situații similare sau care pot sugera posibilitatea folosirii lor și în alte situații.

Ținând seama de orientarea generală, scopul propus și dimensiunile actualei lucrări, precizăm faptul că cititorul nu va găsi exemple de calcul care să acopere întreaga programă analitică a fizicii predată în școala medie.

În speranța că cele cuprinse în această lucrare vor fi de un real folos celor interesați, mulțumim anticipat pentru orice sugestie privind îmbunătățirea ei.

NOȚIUNI DE BAZĂ

În formularea enunțului unei probleme și pe parcursul rezolvării ei se întâlnesc proprietăți ale corpurilor, mărimi fizice, fenomene, legi, teoreme, principii, metode, programe de calcul ș.a.

Dată fiind importanța lor și scopul urmărit în prezenta lucrare, ne-am propus ca o parte din aceste noțiuni să le prezentăm pe scurt în capitolul de față.

1.1. Proprietăți ordonabile. Mărimi fizice. Legile care guvernează fenomenele din natură sînt exprimate sintetic sub formă de relații matematice, care folosesc cîteva simboluri sau combinații ale acestora.

Pentru transpunerea stărilor și proceselor din natură sub forma unor relații matematice cantitative se impune definirea unor concepte, necesare pentru descrierea calitativă și cantitativă a fenomenelor fizice; aceste concepte poartă denumirea de *mărimi fizice*.

Pentru a ajunge la definirea noțiunii de mărime fizică este necesară cunoașterea noțiunii de *proprietate ordonabilă*.

În acest sens să presupunem că se studiază proprietățile unui grup de fire metalice de diferite lungimi și secțiuni, confecționate din materiale diferite, la care ne interesează comportarea lor atunci cînd sînt parcurse de un curent electric. Dacă se realizează un mon-

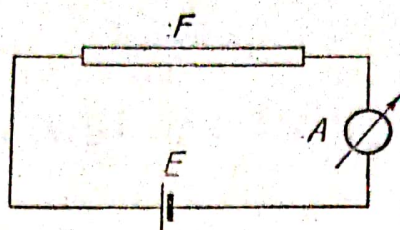


Fig. 1.1

taj simplu, ca cel din figura 1.1, alcătuit dintr-o sursă de curent E , un ampermetru A și firul de încercat F , se constată că, pentru fiecare fir montat în circuit, acul ampermetrului are altă deviație. Se poate trage deci concluzia că prin unele fire curentul electric trece într-o cantitate mai mare în unitatea de timp și deci acestea opun o rezistență mai mică la trecerea curentului, acul ampermetrului avînd o deviație mai mare, iar prin altele trece o cantitate mai mică de curent, acestea din urmă opunînd deci o rezistență mai mare la trecerea curentului electric, acul ampermetrului deviînd mai puțin. Se identifică astfel una din proprietățile acestor corpuri și anume aceea de a opune rezistență trecerii curentului electric. Se mai poate stabili prin această experiență că unele corpuri, deși diferă ca natură și dimensiuni de altele, au aceeași rezistență electrică. Pentru toate acestea, acul ampermetrului a deviat cu același unghi. Se zice despre aceste corpuri că ele fac parte din aceeași *clasă de echivalență*, ceea ce înseamnă că, sub raportul rezistenței opuse la trecerea curentului electric, ele sînt echivalente (se pot înlocui unele pe altele).

Între două corpuri aparținînd la clase diferite de echivalență se poate stabili relația de ordonare și anume că *unul are o rezistență mai mare decît celălalt*. Făcînd același lucru și cu alte corpuri care aparțin unei anumite clase de echivalență, se poate stabili o anumită relație de ordonare, clasele de echivalență putînd fi așezate în ordine crescîndă sau descrescîndă, funcție de valoarea rezistențelor electrice. Se poate conchide astfel că rezistența electrică a unui corp este o proprietate ordonabilă.

Această proprietate poate fi pusă în concordanță cu mulțimea numerelor reale pozitive, dacă una din clasele de echivalență se consideră etalon, iar toate celelalte se compară cu ea. În exemplul considerat se poate alege ca etalon rezistența clasei de echivalență pentru care ampermetrul are deviația cea mai mică (cea mai mare rezistență). Comparînd deviația ampermetrului realizată pentru o anumită clasă de echivalență cu cea realizată la trecerea curentului prin etalon și prima este de k ori mai mică, se poate conchide că rezistența electrică a clasei de echivalență respective este de k ori mai mare.

Procedînd în același mod și cu celelalte clase de echivalență se stabilește rezistența acestor clase în raport cu cea a etalonului reprezentată printr-un număr. Acestei proprietăți (rezistența opusă de un conductor la trecerea curentului electric) i s-au asociat mai multe numere (valorile rezistenței claselor de echivalență respective) cu ajutorul cărora se pot efectua operații matematice.

Rezultă deci că, prin *mărime fizică* se înțeleg exprimarea cantitativă a unei proprietăți ordonabile aparținînd unui sistem fizic, un etalon și un procedeu de măsurare convenabil. Această exprimare cantitativă dă posibilitatea scrierii relațiilor dintre proprietăți sub forma de relații matematice.

Din categoria mărimilor fizice pot fi citate: masa, rezistența electrică, capacitatea, forța, lucrul mecanic, puterea, viteza, accelerația, impulsul, energia cinetică, momentul cinetic, cantitatea de căldură, coeficientul de dilatare, presiunea, temperatura, intensitatea curentului electric, intensitatea cîmpului magnetic etc.

1.2. Măsurarea unei mărimi fizice. Unități de măsură.

Formule dimensionale. Prin măsurarea unei anumite mărimi fizice se înțelege stabilirea a de cîte ori mărimea respectivă este mai mare sau mai mică decît o mărime de referință de aceeași natură considerată ca etalon.

Măsurarea se efectuează adoptînd un *procedeu* convenabil pentru efectuarea unei asemenea măsurări.

Rezultatul măsurării unei mărimi este deci un număr care reprezintă *valoarea numerică* a acesteia.

Astfel dacă mărimea de măsurat este M și unitatea de măsură (etalon) este $\langle M \rangle$ atunci raportul

$$\frac{M}{\langle M \rangle} = \{M\}$$

reprezintă *valoarea numerică* a mărimii măsurate.

Din această relație rezultă că o mărime fizică este definită calitativ de o unitate de măsură (un etalon) și cantitativ de o valoare numerică.

Deoarece în natură există un mare număr de mărimi fizice, pentru definirea lor este necesară existența a cel puțin tot atâtea unități de măsură.

Din cele arătate rezultă că unitatea de măsură a oricărei mărimi poate fi aleasă arbitrar și independent de alte unități de măsură. Așa se explică numărul mare de unități de măsură folosite odinioară pentru măsurarea mărimilor fizice.

Dezvoltarea industrială a impus cu necesitate stabilirea unor etaloane a căror arie teritorială de răspîndire să fie cît mai mare. Numărul acestor etaloane s-a redus simțitor prin stabilirea unor legături de dependență exprimate prin legi sau ecuații de definiție. Au apărut astfel unitățile fundamentale cu ajutorul cărora pot fi exprimate prin ecuații de definiție celelalte unități cunoscute sub denumirea de *unități derivate*.

Unitățile de măsură ale mărimilor fizice de bază care se aleg independent și servesc la determinarea celorlalte unități de măsură se numesc *unități fundamentale*.

Unitățile de măsură ce se stabilesc cu ajutorul celor fundamentale folosind ecuațiile de definiție se numesc unități derivate. Numărul unităților fundamentale necesare variază de la o disciplină la alta. Astfel, de exemplu, în geometrie este necesară o singură unitate fundamentală de măsură — unitatea de lungime — celelalte unități necesare pentru măsurarea suprafețelor și volumelor putînd fi exprimate ca funcții de unitatea de lungime. Mecanica are nevoie de trei unități fundamentale: lungime, masă sau forță și timp. Pentru studiul fenomenelor termice, electromagnetice și lumi-

noase sînt necesare cîte patru unități fundamentale adăugînd celor din mecanică cîte o unitate specifică, respectiv unitatea de temperatură pentru studiul fenomenelor termice, unitatea de intensitate de curent pentru studiul fenomenelor electromagnetice și unitatea de intensitate luminoasă pentru studiul fenomenelor fotometrice.

Totalitatea unităților de măsură fundamentale și derivate folosite într-unul sau mai multe domenii de măsurare alcătuiesc un *sistem de unități de măsură*.

Astăzi există mai multe sisteme de unități de măsură care se deosebesc după unitățile fundamentale precum și după domeniile în care se folosesc.

În funcție de alegerea unităților de măsură, pentru măsurarea mărimilor din mecanică, respectiv pentru măsurarea lungimilor maselor și a timpului, se disting mai multe sisteme de unități.

Sistemul de unități de măsură obligatoriu și legal în țara noastră este *Sistemul Internațional de Unități* (SI) ale cărui unități fundamentale se referă la lungime (L), masă (M), timp (T), intensitatea curentului electric (I), temperatura (θ) și intensitatea luminoasă (J).

În afara unităților fundamentale, în practică, se folosesc *multiplii* și *submultiplii* acestora care se formează după sistemul zecimal. Excepție fac multiplii și submultiplii unităților folosite pentru măsurarea unghiurilor și timpului, care se stabilesc după alte reguli.

Unitățile fundamentale servesc deci la definirea mărimilor fundamentale, iar cele derivate la definirea mărimilor derivate.

Mărimile derivate pot fi: 1) funcție numai de mărimi fundamentale, de exemplu formula de definiție a cantității de electricitate $Q: Q = It$; (I — intensitatea curentului electric, t — timpul) sau a vitezei $v = \frac{ds}{dt}$ (ds — spațiul elementar, dt — timpul elementar);

2) funcție de mărimi fundamentale și derivate, de exemplu impulsul $\vec{H} = m\vec{v}$ (m — masă, $\vec{v}$ — viteză), rezistența electrică $R = \frac{U}{I}$ (U — căderea de tensiune,

I — intensitatea curentului electric) sau energia potențială gravitațională $\Pi = mgh$ (m — masă, g — accelerația gravitației, h — diferența de înălțime);

3) funcție numai de mărimi derivate, de exemplu presiunea $p = \frac{F}{A}$ (F — forță, A — aria suprafeței), debitul volumetric $Q_v = vA$ (v — viteza fluidului, A — aria suprafeței secțiunii) etc.

Mărimile derivate se definesc printr-o relație și printr-o formulare (frază) care conțin atât aspectul calitativ (respectiv proprietatea fizică pe care o măsoară) cât și aspectul cantitativ (respectiv relația în raport cu alte unități cunoscute). Exemple: 1) Impulsul unui punct material este o mărime vectorială egală cu produsul dintre masa punctului material și viteza lui momentană; 2) Puterea este o mărime egală cu câtul dintre lucrul mecanic efectuat de un sistem fizic și intervalul de timp în care a fost efectuat, considerînd acest interval foarte mic.

Formule dimensionale. Dacă formula de definiție a unei mărimi derivate se explicitează pînă ce se obțin într-unul din membri numai mărimi fundamentale, ceea ce se obține poartă numele de *formulă dimensională*.

Exemple:

1) formula dimensională a accelerației este

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{[s]}{[t^2]} = [s] [t^{-2}] = LT^{-2}$$

2) formula dimensională a forței

$$[F] = [m] [a] = LMT^{-2}.$$

În general formula dimensională a unei mărimi mecanice derivate A are următoarea expresie generală

$$[A] = L^\alpha M^\beta T^\gamma.$$

Formulele dimensionale servesc la stabilirea unităților de măsură ale mărimilor derivate și la verificarea omogenității relațiilor dintre mărimile fizice (ambii membri ai unei relații fizice trebuie să aibă aceleași dimensiuni).

În tabela 1.1 sînt menționate principalele unități din SI, simbolurile folosite pentru desemnarea lor, unitățile de măsură corespunzătoare și ecuațiile lor dimensionale.

1.3. Fenomen fizic. Lege. Teoremă. Principiu. Fenomenul fizic este totalitatea ordonată a stărilor pe care le are un sistem fizico-chimic în momentele succesive ale unui interval de timp.

În cadrul fenomenelor fizice intervin modificări de stare sau de poziție ale corpurilor (care nu schimbă compoziția chimică a acestora).

Iată cîteva exemple de fenomene fizice:

Căderea corpurilor, fenomen care are loc atunci cînd un corp se găsește în câmpul gravitațional al Pămîntului.

Electrizarea, fenomen prin care un corp se încarcă cu o sarcină electrică prin frecare (atingerea unui conductor cu altul electrizat) sau prin influență.

Inducția electromagnetică, fenomen prin care în regiunea unde există un câmp magnetic variabil apare un câmp electric variabil.

Curentul electric de conducție, fenomen care constă din deplasarea ordonată a purtătorilor de sarcină electrică într-un conductor sub acțiunea câmpului electric produs de o diferență de potențial.

Magnetizarea unei substanțe, fenomen care se produce atunci cînd aceasta este introdusă într-un câmp magnetic exterior.

Alte exemple de fenomene fizice sînt: dilatarea corpurilor, schimbarea stării de agregare a corpurilor, reflexia, refracția, difracția ș.a.

În general, în sistemele materiale au loc simultan mai multe fenomene.

Astfel, de exemplu, într-un circuit electric cuprinzînd un rezistor și o sursă de curent se produc simultan mai multe fenomene fizice și anume: apariția unui curent electric în circuit, încălzirea rezistorului datorită trecerii curentului electric prin el, încălzire ce poate duce la schimbarea stării de agregare a acestuia etc.

TABELA 11.

**UNITĂȚI FUNDAMENTALE, SUPLIMENTARE
ȘI DERIVATE, ADOPTATE PÎNĂ ÎN PREZENT
DE CONFERINȚA GENERALĂ DE MĂSURI
ȘI GREUTĂȚI**

Nr. ert.	Mărimea	Unitatea de măsură		
		Denumire	Simbol	Simbol dimensional
I. UNITĂȚI FUNDAMENTALE				
1	Lungime	metru	m	L
2	Masă	kilogram	kg	M
3	Timp	secundă	s	T
4	Intensitatea curentu- lui electric	amper	A	I
5	Temperatura termo- dinamică	kelvin	K	θ
6	Intensitate luminoasă	candelă	cd	J
II. UNITĂȚI SUPLIMENTARE				
1	Unghi plan	radian	rad	—
2	Unghi solid	steradian	sr	—
III. UNITĂȚI DERIVATE				
1. Unități ale mărimilor de spațiu și timp				
1	Arie	metru pătrat	m ²	L ²
2	Volum	metru cub	m ³	L ³
3	Viteză	metru pe secundă	m/s	LT ⁻¹
4	Viteză unghiulară	radian pe secundă	rad/s	T ⁻¹
5	Accelerație	metru pe secun- dă la pătrat	m/s ²	LT ⁻²
6	Accelerație unghiulară	radian pe se- cundă la pătrat	rad/s ²	T ⁻²

Tabela 1.1. (continuare)

Nr. crt.	Mărimea	Unitatea de măsură		
		Denumire	Simbol	Simbol dimensional
2. Unități ale mărimilor caracteristice fenomenelor periodice și conexe				
7	Număr de undă	unu pe metru	1/M	L^{-1}
8	Frecvență	hertz	Hz	T^{-1}
3. Unități ale mărimilor caracteristice mecanicii				
9	Densitate (masă volumică)	kilogram pe metru cub	kg/m^3	$L^{-3}M$
10	Forță	newton	N	LMT^{-2}
11	Presiune, tensiune mecanică	newton pe metru pătrat	N/m^2	$L^{-1}MT^{-2}$
12	Viscozitate dinamică	newton-secundă pe metru pătrat	$N \cdot s/m^2$	$L^{-1}MT^{-1}$
13	Viscozitate cinematică	metru pătrat pe secundă	m^2/s	L^2T^{-1}
14	Lucru mecanic, energie, cantitate de căldură	joule	J	L^2MT^{-2}
15	Putere	watt	W	L^2MT^{-3}
4. Unități ale mărimilor caracteristice electromagnetismului				
16	Sarcină electrică, cantitate de electricitate	coulomb	C	TI
17	Tensiune electrică, diferență de potențial, tensiune (forță) electromotoare	volt	V	$L^2MT^{-3}I^{-1}$
18	Intensitatea câmpului electric	volt pe metru	V/M	$LMT^{-3}T^{-1}$
19	Rezistență electrică	ohm		$L^2MT^{-3}I^{-2}$
20	Capacitate electrică	farad	F	$L^2M^{-1}T^4I^2$

Tabela 1.1. (continuare)

Nr. crt.	Mărimea	Unitatea de măsură		
		Denumire	Simbol	Simbol dimensional
21	Intensitatea câmpului magnetic	amper/metru	A/m	$L^{-1}I$
22	Tensiune (forță) magnetomotoare, potențial magnetic	amper	A	I
23	Fluxul inducției magnetice (flux magnetic)	weber	Wb	$L^2MT^{-2}I^{-1}$
24	Inducție magnetică	tesla	T	$MT^{-2}I^{-1}$
25	Inductanță	henry	H	$L^2MT^{-2}I^{-2}$
5. Unități ale mărimilor caracteristice căldurii				
26	Entropie	joule pe kelvin	J/K	$L^2MT^{-2}\theta^{-1}$
27	Căldură masică	joule pe kilogram-kelvin	J/(kg · K)	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$
28	Conductivitate termică	watt pe metru-kelvin	W/(m · K)	$LMT^{-3}\theta^{-1}$
6. Unități ale mărimilor caracteristice opticii				
29	Intensitate energetică	watt pe steradian	W/sr	L^2MT^{-3}
30	Flux luminos	lumen	lm	J
31	Luminanță	candelă pe metru pătrat	cd/m ²	$L^{-2}J$
32	Iluminare	lux	lx	$L^{-2}J$
7. Unități ale mărimilor caracteristice reacțiilor nucleare și radiațiilor ionizante				
33	Activitatea unui radionuclid sau a unei surse radioactive	unu pe secundă	1/s	T^{-1}

Un cilindru așezat pe un plan înclinat pe care cade este supus fenomenelor de cădere, rotire, deformare în zona de contact etc.

Deoarece studierea tuturor fenomenelor care au loc simultan ar îngreuna foarte mult rezolvarea unei probleme, se aleg dintre acestea unul sau mai multe, pe care le considerăm ca fiind principale, corespunzătoare scopului urmărit. Celelalte fenomene le considerăm secundare, putînd fi astfel neglijate.

Evident, mărimile ce caracterizează proprietățile sistemelor materiale care participă la fenomenele principale sînt singurele care apar în calcule.

Este de menționat faptul că fenomenele principale care au loc în sistemele materiale rezultă fie direct, printr-o precizare expresă în enunțul problemei, fie indirect, prin examinarea naturii diferitelor mărimi cuprinse în enunț. Uneori, chiar enunțul precizează fenomenele care trebuie să fie neglijate la rezolvarea problemei. Astfel, dacă se consideră ca fenomen principal căderea unui corp în vecinătatea suprafeței Pămîntului, trebuie neglijate următoarele fenomene secundare: variația accelerației gravitației cu altitudinea, frecarea corpului cu mediul înconjurător, încălzirea corpului ca urmare a acestei frecări, deformarea corpului în timpul mișcării, influența mișcării Pămîntului, influența formei și dimensiunilor corpului etc.

După selectarea tuturor fenomenelor principale este necesară o limitare a domeniului de desfășurare a acestora în timp, corespunzătoare scopului urmărit. Uneori această limitare se reduce la luarea în considerare a două sau mai multe stări discrete (corespunzătoare anumitor momente) din desfășurarea fenomenelor.

Astfel, se consideră următorul exemplu: un proiectil de plumb este lansat vertical în sus. Se întreabă care va fi starea fizică și temperatura finală a proiectilului dacă acesta va fi oprit la jumătatea drumului de o placă, admitînd că întreaga sa energie cinetică s-a transformat în căldură.

În acest exemplu au loc următoarele fenomene principale:

— mișcarea uniform întârziată a proiectilului pe verticală;

— ciocnirea proiectilului cu placa;

— încălzirea proiectilului;

— eventuala schimbare a stării sale de agregare.

Mișcarea proiectilului este limitată între momentul corespunzător aruncării sale și cel al ciocnirii cu placa; nu interesează nici modul în care proiectilul a fost adus pînă la viteza de lansare și nici ce se întîmplă cu el după încălzire și eventuala schimbare a stării de agregare (cade, rămîne lipit de placă). Evident nu interesează nici mărimile corespunzătoare desfășurării acestui fenomen în afara limitărilor arătate.

Fenomenele fizice decurg după anumite *legi*, care constituie expresia legăturilor generale, esențiale și necesare dintre stările sale (proprietățile momentane ale unui sistem material).

Legile fizice se exprimă sintetic în formule matematice în care simbolurile reprezintă mărimile fizice atașate sistemelor materiale și fenomenelor care au loc în aceste sisteme.

Astfel, legea ce exprimă fenomenul de atracție universală este reprezentată de relația care dă forța de atracție dintre două corpuri respective

$$F = k \frac{mm'}{d^2}$$

unde m este masa unuia dintre corpuri, m' este masa celuilalt corp, iar d este distanța dintre cele două corpuri, k fiind o constantă.

Legea ce exprimă trecerea unui gaz ideal dintr-o stare 1, caracterizată prin mărimile de stare p_1 , v_1 , T_1 , n_1 , într-o altă stare 2, caracterizată prin mărimile de stare p_2 , v_2 , T_2 , n_2 , se exprimă sub forma

$$\frac{p_1 v_1}{n_1 T_1} = \frac{p_2 v_2}{n_2 T_2} = R$$

unde p_1 și p_2 sînt respectiv presiunile gazului în cele două stări, n_1 și n_2 — numărul de moli, v_1 și v_2 — volumele gazului în cele două stări, iar R — constanta universală a gazelor ideale.

Dintr-un sistem de axiome sau legi ale unui domeniu din fizică se deduc *teoremele*.

Un asemenea exemplu îl constituie *teoremele lui Kirchhoff* care se bazează pe legea conservării sarcinii electrice (prima teoremă) și pe legea lui Ohm și a teoremei potențialului electric (a doua teoremă).

Alte exemple sînt:

— teorema energiei cinetice care se bazează pe principiul acțiunii forței și pe definițiile vitezei și lucrului mecanic;

— teorema impulsului care se bazează tot pe principiul acțiunii forței și pe definiția impulsului unei forțe;

— teorema lui Varignon care se bazează pe principiul paralelogramului.

Formularea completă, relațiile matematice și modul de aplicare a teoremelor menționate se pot urmări în acel capitol al prezentei lucrări în care sînt prezentate unele metode de calcul folosite în fizică.

Legile cu caracter mai general aplicabile unui număr mare de fenomene și transformări, ireductibile la altele cunoscute, poartă numele de *principii*. Exemple în acest scop îl pot constitui principiile de bază ale mecanicii clasice prezentate, ca formulare și relații, în cele ce urmează.

1) *Principiul inerției* potrivit căruia un punct material liber asupra căruia nu acționează nici o forță rămîne veșnic în repaus față de un reper fix, dacă se găsea în această stare la un moment dat sau se mișcă rectiliniu și uniform față de același reper, dacă la momentul considerat se afla în mișcare față de reperul ales.

Matematic acest principiu se exprimă prin condițiile: dacă forța $\vec{F} = 0$, atunci avem fie viteza $\vec{v} = 0$, fie $\vec{v} = \text{const.}$

2) *Principiul acțiunii forței* potrivit căruia un corp acționat față de un sistem de referință fix de o forță $\vec{F}$ capătă o accelerație $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, în care m reprezintă masa corpului.

3) *Principiul acțiunii și reacțiunii* potrivit căruia două corpuri acționează unul asupra celuilalt cu forțe egale și direct opuse.

Relația corespunzătoare acestui principiu este

$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$$

unde $\vec{F}_{ij}$ este forța cu care corpul i acționează asupra corpului j , iar $\vec{F}_{ji}$ forța cu care corpul j acționează asupra corpului i .

4) *Principiul paralelogramului* potrivit căruia acțiunea a două forțe concurente poate fi înlocuită cu aceea a unei singure forțe, dată în mărime, direcție și sens de diagonala paralelogramului construit pe cele două forțe ca laturi.

Exprimarea matematică se face prin relația

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

La rezolvarea problemelor de fizică expresiile matematice ale legilor, teoremelor și principiilor joacă un rol foarte important, necunoscutele fiind în general mărimi cuprinse în exprimarea acestora.

Scurta prezentare făcută mai sus pune în evidență importanța pe care o are cunoașterea condițiilor în care apar fenomenele și modul în care acestea trebuie luate în considerație.

Atît în exemplul prezentat în continuare cît și pe parcursul lucrării, din exemplele de calcul ce însoțesc expunerea va rezulta acest lucru.

E 1.1. Într-un tub de sticlă sudat la unul din capete, avînd lungimea $l = 70$ cm, se află o coloană de aer închisă cu ajutorul unui piston, deasupra căruia se află o coloană de mercur cu înălțimea $h = 20$ cm, mercurul aflîndu-se în partea de sus a tubului (fig. E 1.1, a). Se întoarce tubul cu grijă spre a nu se vărsa din mercur.

a) Ce înălțime x va avea coloana de mercur rămasă în tub după întoarcerea acestuia, dacă presiunea atmosferică este $p_0 = 750$ torr?

b) Pentru ce lungime a tubului cantitatea de mercur cu înălțimea h se va scurge în întregime din tub cînd acesta este întors?

Se va neglija greutatea pistonului și se va considera pentru mercur $\rho = 13,6 \times 10^3$ kg/m³. [7]

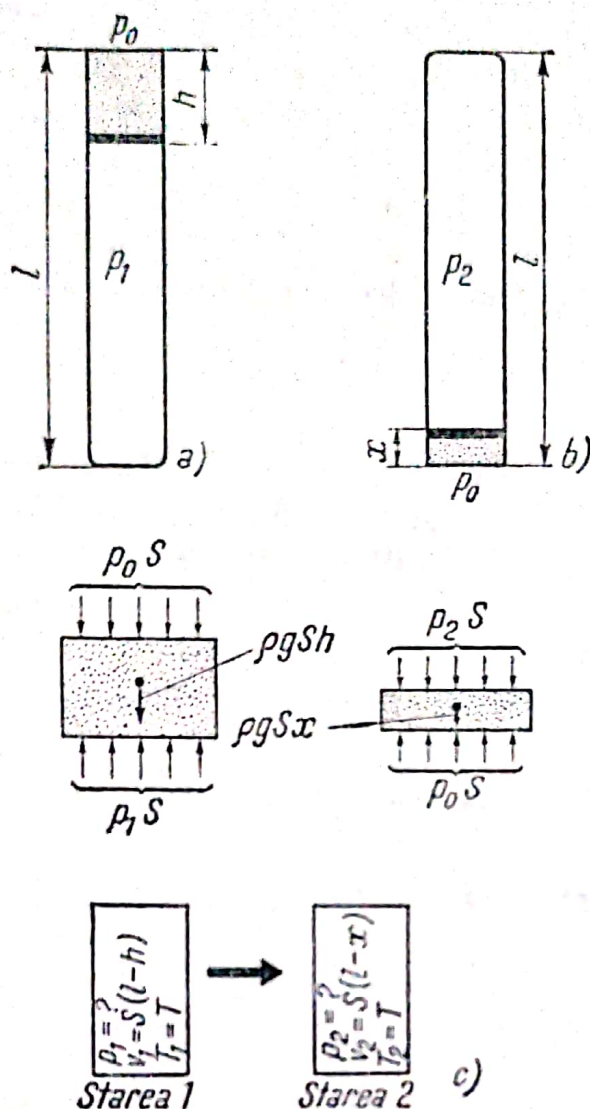


Fig. E 1.1

Rezolvare. Remarcăm mai întâi faptul că din enunțul acestei probleme lipsesc precizările în legătură cu unele fenomene secundare ce se neglijează, cum ar fi, spre exemplu, frecările; enunțul ar fi trebuit să precizeze: „se neglijează orice fel de frecări” (între piston și tub, între mercur și tub).

O a doua remarcă este aceea că din enunț lipsește o precizare esențială pentru rezolvarea problemei „temperatura gazului din tub rămîne constantă în tot timpul acestei experiențe”.

Odată făcute aceste precizări, trebuie să observăm că în problemă au loc trei fenomene principale și anume (fig. E 1.1.):

a) Echilibrul coloanei de mercur, de înălțime h , sub acțiunea forței de presiune atmosferică, a forței de presiune a aerului închis în tub și a greutății sale proprii (fig. E 1.1, a). Notînd cu S secțiunea necunoscută a tubului (care va dispărea pînă la urmă din calcul) și scriind ecuația ce caracterizează acest fenomen (ecuația de echilibru a forțelor menționate mai sus) obținem

$$p_1 S = p_0 S + \rho g S h. \quad (1)$$

b) Echilibrul coloanei de mercur de înălțime x sub acțiunea forței de presiune atmosferică, a forței de presiune a aerului închis în tub (care s-a schimbat față de prima stare) și a greutății sale proprii (fig. E 1.1, b).

Scriind ecuația ce caracterizează și acest al doilea fenomen (ecuația de echilibru a forțelor menționate mai sus) obținem

$$p_0 S = p_2 S + \rho g S x. \quad (2)$$

c) Transformarea izotermă a gazului din tub din starea 1 (p_1, v_1, T_1) în starea 2 (p_2, v_2, T_2).

Scriind ecuația ce caracterizează acest al treilea fenomen (legea Boyle-Mariotte) obținem

$$p_1 S(l - h) = p_2 S(l - x). \quad (3)$$

Alte fenomene principale nu mai există.

Ca urmare a exprimării matematice a legilor celor trei fenomene care au loc în problemă am obținut un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute: p_1, p_2, x . Deoarece în problemă nu ni se cer valorile presiunilor p_1 și p_2 le vom elimina din calcule.

Din (1) rezultă

$$p_1 = p_0 + \rho g h.$$

Din (2) rezultă

$$p_2 = p_0 - \rho g x.$$

Introducînd aceste rezultate în (3) obținem

$$(p_0 + \rho g h)(l - h) = (p_0 - \rho g x)(l - x).$$

Se observă că secțiunea S a dispărut din calcule. Rezultă în final ecuația

$$\rho g x^2 - (p_0 + \rho g l)x + h(p_0 + \rho g h - \rho g l) = 0 \quad (4)$$

din care se determină înălțimea x .

Rezolvarea acestei ecuații va fi comentată în capitolul următor, în partea referitoare la prezentarea programului de interpretare.

1.4. Poziții sau stări. Sistemele materiale care evoluează în problemele de fizică trec în decursul acestor evoluții prin mai multe *poziții* sau *stări* denumite convențional astfel:

a) *Poziție (stare) inițială*; aceasta este prima poziție (stare) în care se află sistemul material considerat în ordine cronologică, adică acea poziție (stare) din care în problemă se iau în considerare fenomenele respective.

Este de remarcat faptul că un fenomen se poate declanșa începînd cu această stare (ex: aruncarea unei pietre, scurgerea unui gaz) sau el să se afle în plină desfășurare în momentul în care sistemul se află în această poziție (stare), fapt care justifică aspectul convențional al acestei categorisiri. Astfel, de exemplu, putem considera drept poziție inițială în mișcarea sa pe verticala ascendentă a unei pietre, cea aflată la jumătatea distanței dintre Pămînt și punctul cel mai de sus în care ea ajunge, cu toate că fenomenul (mișcarea sa) a început mai înainte, în clipa aruncării sale de pe Pămînt,

b) *Poziție (stare) finală*; aceasta este ultima poziție (stare) în care se află sistemul material considerat, adică acea poziție (stare) pînă la care se iau în considerație fenomenele din problema respectivă. La fel ca mai înainte, datorită caracterului convențional al acestei împărțiri, starea finală poate coincide sau nu cu sfîrșitul fenomenelor care au loc în problema respectivă.

c) *Poziție (stare) oarecare* este orice poziție (stare) intermediară între cea inițială și cea finală. Este de

remarcat faptul că în timp ce pozițiile (stările) inițială și finală sînt unice, există o infinitate de poziții (stări) oarecare, principala sa trăsătură fiind variabilitatea ei. Considerarea acestei stări este necesară atunci cînd se caută legea de variație a unei mărimi, cînd se efectuează o derivată, o integrală, sau cînd se scrie o ecuație diferențială între mărimile de stare ale fenomenului respectiv.

Fiecare din cele trei poziții (stări) menționate mai sus sînt caracterizate prin parametri de stare respectivi, notați de regulă cu indicele 0 pentru starea inițială, cu indicele 1 pentru starea finală și fără nici un indice pentru starea oarecare. Este de remarcat faptul că parametri ce caracterizează stările inițială și finală sînt mărimi constante, iar parametri ce caracterizează starea oarecare sînt mărimi variabile cu poziția sistemului care evoluează în timp.

Cunoașterea și delimitarea precisă a acestor poziții pe care le ocupă un sistem material permite înțelegerea mai profundă a rezolvărilor prezentate în lucrarea de față.

1.5. Mărimi de stare și mărimi de proces. Împărțirea mărimilor ce apar în fizică după aceste două mari criterii este importantă pentru rezolvarea corectă a aplicațiilor.

Mărimile de stare sau parametri de stare sînt mărimile ce caracterizează o anumită stare a unui sistem material; ele sînt în general variabile atunci cînd sistemul trece de la o stare la alta, de aceea se spune despre ele că sînt mărimi *momentane*.

Astfel, spre exemplu, dacă sistemul material considerat este un corp aflat în starea de mișcare rectilinie putem considera următoarele mărimi de stare la un moment dat:

- coordonata x cu ajutorul căreia se determină poziția corpului mobil
- viteza v
- accelerația a

- energia cinetică E
- impulsul h

precum și alte mărimi.

Dacă mișcarea rectilinie considerată este uniformă, în trecerea sistemului (mobilului) de la o stare (poziție) la alta, coordonata x variază: $x = x(t)$, în timp ce toate celelalte mărimi (v , a , E , h) păstrează valori constante.

Dacă mișcarea rectilinie considerată este uniform variată, în trecerea aceluiași sistem (mobil) de la o poziție (stare) la alta coordonata sa x , viteza v , energia cinetică E și impulsul h variază, rămânând constantă numai accelerația a : $x = x(t)$, $v = v(t)$, $E = E(t)$, $h = h(t)$, $a = \text{const.}$ În fine, dacă mișcarea rectilinie considerată este neuniform variată (spre exemplu o mișcare rectilinie oscilatorie armonică) toate cele cinci mărimi de stare menționate mai sus sînt variabile în timp (mărimi momentane). Din exemplele de mai sus rezultă că, în trecerea sistemului de la o stare la alta, mărimile de stare sînt *în general* variabile, fapt care nu exclude însă situații de genul celor menționate mai sus, cînd aceste mărimi pot rămîne constante, adică invariante față de schimbarea de stare a sistemului material considerat.

Un alt exemplu îl constituie un sistem material alcătuit dintr-un gaz supus la o serie de transformări; mărimile de stare în acest caz sînt:

- presiunea gazului p
- temperatura T
- volumul v
- masa m
- densitatea ρ
- numărul de moli n
- energia internă U

și încă altele.

Stări de mișcare a unui corp îi corespunde în acest caz starea de echilibru termodinamic a gazului la un moment dat, iar schimbării de stare (mișcării corpului) îi corespunde în acest caz transformarea termodinamică a gazului.

Într-o asemenea transformare mărimile de stare menționate mai sus pot fi toate sau numai o parte variabile, celelalte rămânând în acest caz constante. Astfel, dacă într-o transformare cantitatea de gaz nu se modifică (nu este dat afară și nici nu este introdus înăuntru gaz) mărimile m și n rămân constante. Dacă temperatura gazului nu se modifică, mărimile T și U rămân constante, celelalte fiind variabile. În transformările izobară și izocoră presiunea, respectiv volumul, rămân constante ș.a.m.d.

În afara acestor mărimi care caracterizează o anumită stare, atunci când se iau în considerare două stări (inițială și finală) este necesar să considerăm o serie de alte mărimi ce caracterizează trecerea sistemului din prima în cea de a doua stare. Aceste mărimi nu au sens într-o anumită stare ci numai pe un interval închis ce conține la extremități stările la care ne referim.

Ca exemplu să considerăm ecuația energiei

$$E_1 = E_0 + L,$$

care se aplică între două stări ale sistemului material considerat, denumite în mod convențional starea inițială 0 și starea finală 1. În această ecuație apar mărimile de stare E_0 și E_1 și mărimea de proces. (notată uneori și cu L_{0-1}). Într-adevăr, în timp ce mărimile E_1 și E_0 caracterizează strict stările 0 și 1, mărimea L nu are sens decât pe intervalul dintre stările 0 și 1 (nu există lucrul mecanic al unei forțe într-o poziție, ci pe intervalul dintre două poziții).

Un alt exemplu îl constituie mărimea Q (cantitatea de căldură schimbată de un gaz cu mediul exterior în timpul unei transformări oarecare a acestuia), care este de asemenea o mărime de proces.

În mecanică spațiul s parcurs de un mobil este de asemenea o mărime de proces, spre deosebire de coordonata mobilului care este o mărime de stare (nu are sens spațiul parcurs într-o anumită poziție ci numai între două poziții).

Nu trebuie să se creadă însă că într-o relație în care intervin mărimi ce caracterizează două stări ale aceluiași sistem material intervin în mod obligatoriu

mărimi de proces; ca exemplu în acest sens cităm relația

$$\frac{p_1 v_1}{m_1 T_1} = \frac{p_2 v_2}{m_2 T_2}$$

care leagă între ele valorile mărimilor de stare ale unui gaz (p , v , n , T) din cele două stări considerate (1 și 2) fără ca ea să conțină mărimi ce caracterizează intervalul [1, 2].

Se poate constata ușor că există relații dintre două stări care conțin atât mărimi de stare cît și mărimi de proces, care conțin numai mărimi de stare sau care conțin numai mărimi de proces cum este de exemplu relația

$$\Delta U = Q - L,$$

care exprimă relația dintre variația energiei interne ΔU a unui gaz, cantitatea de căldură Q și lucrul mecanic L schimbate de gaz cu mediul exterior.

Tot ca mărimi de proces sînt considerate uneori *prin convenție* și variațiile mărimilor de stare pe intervalul respectiv, obținute de regulă prin scăderea valorii inițiale din cea finală: avem astfel $\Delta E = E_1 - E_0$ (variația energiei cinetice a unui mobil); $\Delta T = T_2 - T_1$ (variația temperaturii unui gaz); $\Delta m = m_2 - m_1$ (variația masei unui gaz); $\Delta U = U_1 - U_0$ (variația energiei interne a unui gaz); $\Delta R = R_2 - R_1$ (variația rezistenței ohmice a unui rezistor) precum și multe altele. Aceste mărimi nu depind de intervalul 1—2 ci numai de extremitățile lui.

Considerațiile de mai sus joacă un rol important la aplicarea corectă a relațiilor ce intervin în toate metodele bipoziționale.

1.6. Metodă. Program. Rezolvarea oricărei probleme de fizică se face folosind una sau mai multe relații între mărimile fizice care apar în problema respectivă sau între altele care sînt funcții de ele.

La aceste relații se ajunge folosind acele informații din enunț, care se referă la proprietățile fizice ale sis-

temelor materiale sau la fenomenele la care participă sistemele materiale respective.

Informațiile sugerează totodată legile, teoremele și principiile care trebuie folosite la rezolvarea problemei.

Unele dintre ecuațiile care exprimă legile, teoremele și principiile fizicii se pot aplica direct, fără vreo pregătire specială care să necesite o ordonare a operațiilor efectuate pentru aplicarea lor. În acest caz se zice că aplicăm o *formulă* de fizică.

Alte ecuații necesită, în vederea aplicării lor, o succesiune mai mult sau mai puțin unică a calculelor, adică ceea ce se numește o *metodologie de calcul*. În acest caz avem de-a face cu un mod rațional de înlănțuire a unor operații, cunoscută sub denumirea de *metodă*.

Prezentarea sistematică a unei metode de calcul și a metodologiei acesteia se face sub forma unui *program*.

Astfel, pe parcursul rezolvării unor probleme se poate aplica formula presiunii într-un lichid

$$p = p_0 + \rho gh$$

care dă valoarea presiunii p la adâncimea h de la suprafața liberă, într-un lichid de densitate ρ când este cunoscută presiunea la suprafața sa p_0 .

Un alt exemplu îl constituie aplicarea formulei dilatării liniare a unei bare

$$l = l_0(1 + \alpha t)$$

care dă lungimea barei respective la temperatura t când sînt cunoscute lungimea sa l_0 de la temperatura de 0°C și coeficientul de dilatare liniară α al materialului din care este confecționată bara.

Aplicarea acestor relații se face direct, cu precauții minime.

Cu totul alta este situația atunci când este necesară, spre exemplu, aplicarea teoremei energiei; în această relație intervin energii, viteze, forțe, lucruri mecanice, a căror determinare pe baza informațiilor din enunțul problemei se face mai anevoios, cu anumite precauții, spre a nu greși. Aplicarea acestei *teoreme* impune deci o *metodă* de calcul, respectiv un *program* valabil

pentru orice problemă în care urmează să fie folosită, fapt care conduce la metoda energiei.

Cele mai importante metode folosite la rezolvarea problemelor de fizică împreună cu metodologia, programul de aplicare și unele exemple privind modul de aplicare al acestora, sînt prezentate în detaliu într-un capitol separat.

1.7. Metode monopozitionale și metode bipozitionale.

La rezolvarea problemelor de fizică se folosesc două categorii de metode și anume:

a) *Metode monopozitionale* sînt acele metode ale căror ecuații se aplică într-o singură poziție a sistemului considerat. Ca exemplu în acest sens cităm metoda ecuației fundamentale $m\bar{a} = \bar{F}$, metoda ecuației de stare a gazelor $pV = nRT$ ș.a. În expresiile ecuațiilor folosite la acest tip de metode apar numai acei parametri care caracterizează sistemul în poziția considerată (a , p , v , T).

Ca poziție în care se aplică metoda respectivă poate fi aleasă oricare dintre cele trei poziții în care se află sistemul în decursul unui fenomen (inițială, finală, oarecare). Este de observat faptul că orice metodă monopozitională se poate aplica numai în poziția oarecare, urmînd ca rezultatele corespunzătoare celorlalte două stări (inițială și finală) să fie deduse prin înlocuirea în rezultatele obținute a valorilor parametrilor de stare ai sistemului, corespunzătoare pozițiilor inițială și finală. Această observație poate constitui de multe ori un criteriu de verificare al rezultatelor obținute.

b) *Metode bipozitionale* sînt acele metode ale căror ecuații se aplică pentru o pereche de poziții a sistemului considerat. Ca exemplu în acest sens cităm metoda energiei, metoda ecuației de stare scrisă sub forma

$$\frac{p_1 v_1}{T_1} = \frac{p_2 v_2}{T_2} = nR \text{ ș.a.}$$

În expresiile ecuațiilor folosite la acest tip de metode apar simultan atît parametrii care caracterizează

prima stare cît și cei care caracterizează cea de a doua stare a sistemului considerat.

Perechea de poziții căreia i se aplică acest tip de metodă este de regulă fie poziția inițială și poziția finală, fie poziția inițială și o poziție oarecare a sistemului. Este de observat faptul că în ultima variantă se obțin rezultate cu un grad mai mare de generalitate; ea se folosește în special atunci cînd se caută diferite legi de variație ale parametrilor sistemului pe parcursul evoluției sale între poziția inițială și cea finală.

Alegerea unuia sau altele dintre aceste două tipuri de metode în vederea rezolvării pe calea cea mai rapidă a unei anumite probleme de fizică depinde de abilitatea și experiența rezolvitorului.

STRUCTURA ȘI REZOLVAREA UNEI PROBLÈME DE FIZICĂ

2.1 Generalități. Este deosebit de important faptul ca cel care rezolvă o problemă de fizică să aibă, pe lângă temeinice cunoștințe teoretice, și o concepție de ansamblu asupra structurii și logicii de rezolvare a acesteia.

Este de la sine înțeles că nu se pot da tipare fixe pentru rezolvarea oricărei probleme de fizică; varietația acestor probleme, noile descoperiri ale științei, apariția permanentă de interconexiuni între diferitele domenii ale fizicii sînt tot atîtea argumente împotriva oricăror încercări de a stabili scheme, rețete sau programe de calcul rigide.

Totuși, trebuie luat în considerație faptul că cel care abordează o problemă de fizică se află în fața a foarte multe formule, legi, principii, teoreme, pe care trebuie să le aplice corect pentru a ajunge la rezultatele cerute în enunț; iată de ce s-a considerat utilă o sistematizare a rezolvării problemelor.

În figura 2.1 este schematizată structura de ansamblu a unei probleme de fizică, împreună cu ordinea logică a operațiilor ce se efectuează în vederea rezolvării ei.

Pornind de la enunțul problemei respective, cel care rezolvă o problemă de fizică trebuie să parcurgă următoarele etape:

- analiza conținutului și extragerea elementelor de calcul (informarea);
- punerea în ecuații;

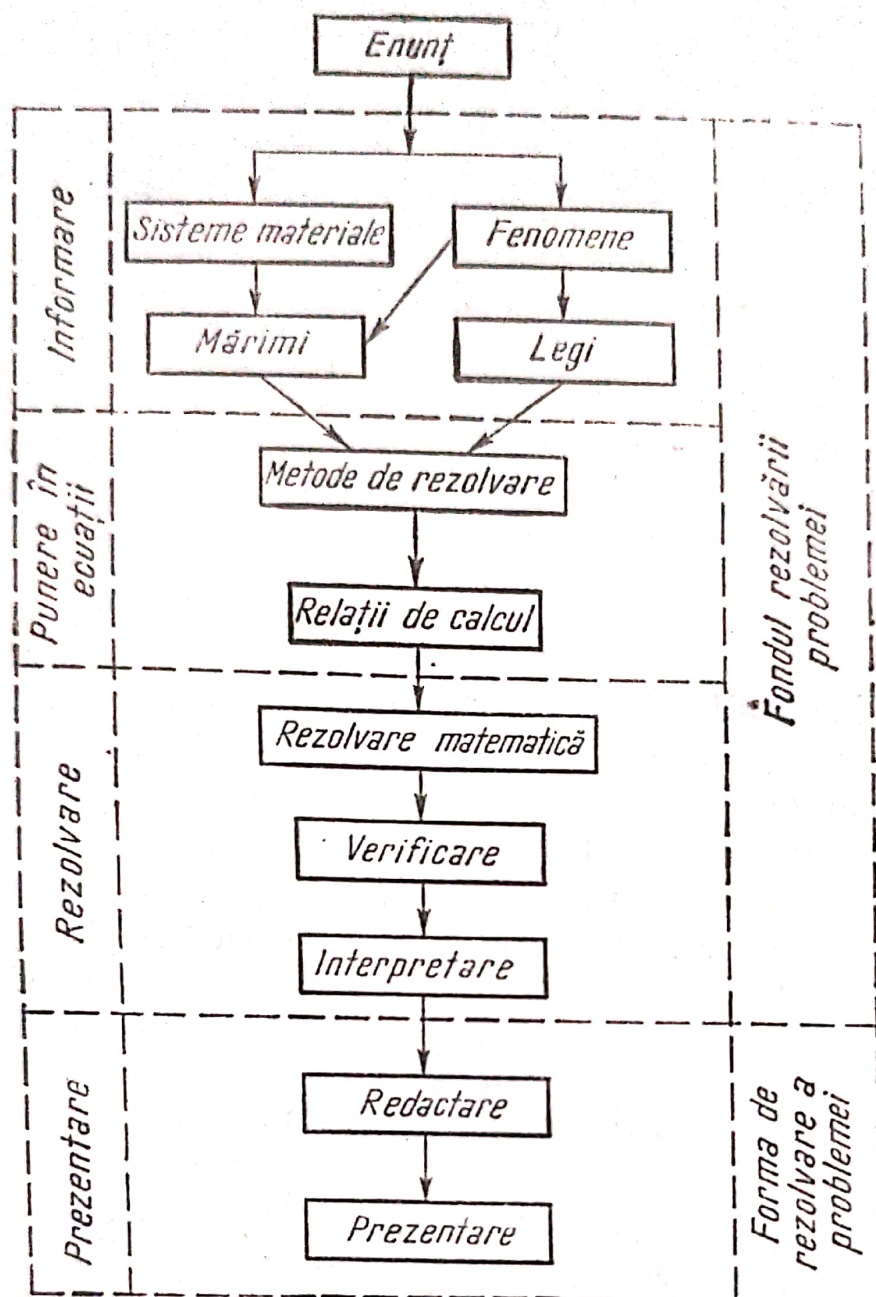


Fig. 2.1

- rezolvarea;
- prezentarea rezolvării.

În continuare se analizează în detaliu atât enunțul cât și părțile componente ale acestor etape.

2.2. Enunț. În rezolvarea unei probleme un rol deosebit de important îl are enunțul. De formularea lui depinde înțelegerea conținutului și chiar modul și rapiditatea rezolvării problemei.

Prezentarea corectă a datelor necesare calculului, a ordinii de determinare a necunoscutelor, executarea corectă a schemei (în cazul în care aceasta este necesară și poate fi realizată numai cu ajutorul datelor din enunț), folosirea unităților de măsură admise, cu precădere a celor din Sistemul Internațional și mai puțin a celor derivate, constituie factori foarte importanți care ajută la înțelegerea cu ușurință a conținutului.

Se spune, și pe bună dreptate, că un enunț corect formulat și înțeles înseamnă de fapt problema rezolvată pe jumătate.

Ținând seama de faptul că, în general, cei ce rezolvă o problemă ajung la aceste concluzii după mulți ani de experiență, am considerat utilă o scurtă prezentare a conținutului, însemnătății și utilității enunțului; în acest mod se poate realiza mai ușor unul din dezideratele propuse și anume acela de a învăța pe cel ce rezolvă o problemă să gândească rezolvarea ei o dată cu prezentarea acesteia.

Formularea clară, concisă, completă și exactă care conține toate informațiile necesare rezolvării, datele și necunoscutele ce urmează să fie determinate constituie *enunțul unei probleme*.

2.3. Informații.

2.3.1. *Conținut*. Totalitatea indicațiilor necesare pentru rezolvare constituie *informațiile problemei*. Informațiile unei probleme trebuie să conțină următoarele:

a) *Prezentarea sistemelor materiale cuprinse în enunțul problemei și a legăturilor dintre ele*. Folosind reprezentarea prin semne convenționale a acestora, ținând seama de legăturile dintre ele, se alcătuiește o schemă. În această schemă sistemele materiale poartă denumirea de *elemente ale schemei* sau pe scurt *elemente*. Exemple de asemenea elemente sînt: planul înclinat, bila, un corp oarecare (avion, automobil, om etc.) voltmetrul, rezistorul, bobina, condensatorul, generatorul de curent (galvanic, rotativ, termoelectric) întrerupătorul, reostatul, ampermetrul, voltmetrul etc.

Legăturile dintre elemente se realizează prin contact direct, prin legături electrice cu ajutorul conductorilor, prin inducție, prin unde electromagnetice etc.

Semnele convenționale folosite pentru reprezentarea elementelor sînt în general standardizate. În tabela 2.1 sînt reprezentate spre exemplu semnele convenționale folosite în schemele și planurile de instalații electrice.

b) *Prezentarea valorilor numerice ale mărimilor cunoscute aparținînd elementelor problemei sau a celor ce rezultă din legăturile dintre acestea.*

c) *Precizarea eventuală a unor fenomene cărora le sînt supuse elementele (încălzire, mișcare, electrizare, inducție etc.) restul fenomenelor putînd fi identificate din schema problemei.*

d) *Condițiile impuse diverselor elemente, grupări de elemente sau fenomene.*

După modul lor de prezentare informațiile cuprinse în enunț pot fi: *directe, indirecte, ascunse și complexe.*

2.3.2. Feluri de informații

2.3.2.1. *Informațiile directe sînt cele care denumesc mărimea, o notează și îi precizează valoarea numerică. Ca exemple dăm următoarele fragmente de enunț:*

— Într-un circuit care conține o sursă de tensiune electromotoare $E = 2,2 \text{ V}$ și rezistență interioară $r = 0,1 \Omega$...

— Două sarcini electrice punctiforme și de același semn $Q_1 = 2 \times 10^{-6} \text{ C}$ și $Q_2 = 2 \times 10^{-7} \text{ C}$ se află în vid la distanța $d = 2 \text{ m}$.

— Intensitatea curentului din circuitul principal al montajului din figură, care conține rezistențele $R_1 = 2 \Omega$ și $R_2 = 3 \Omega$ montate în paralel și o bobină cu rezistența $R_3 = 5 \Omega$ montată în serie cu rezistențele R_1 și R_2 este de $I = 3 \text{ A}$...

— O bilă de masă $m = 0,5 \text{ kg}$ se deplasează pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30^\circ$ cu orizontala, aruncat cu viteza $v_0 = 2 \text{ m/s}$ de la baza acestuia; între bilă și plan există frecare de coeficient $\mu = 0,1$.

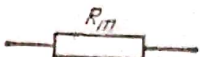
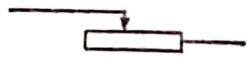
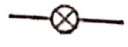
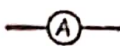
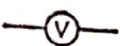
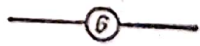
2.3.2.2. *Informații indirecte sînt acelea din care mărimile ce interesează rezultă direct din altă mărime dată*

TABELA 2.1.

SEMNE CONVENȚIONALE FOLOSITE ÎN SCHEMELE ELECTRICE

Nr. crt.	Denumirea elementului	Semnul
1	Linie electrică, conductor electric	
2	Sensul de transmitere al curentului, semnalelor sau fluxului de energie	
3	Încrucișarea a două conductoare	
4	Derivația conductoarelor legătura executându-se direct	
5	Priză de pământ, „legare sau punere la pământ“	
6	Curent continuu	
7	Curent alternativ	
8	Curent continuu și curent alternativ	
9	Borne alimentate de curent continuu	
10	Borne alimentate de curent alternativ	
11	Condensator fix de capacitate C	
12	Condensator variabil	
13	Rezistor de rezistență R	
14	Bobină ideală de inducțanță proprie L și rezistență $R = 0$	
15	Element de circuit electric cu impedanță complexă Z	

Tabela 2.1. (continuare)

Nr. crt.	Denumirea elementului	Semnul
16	Element de circuit magnetic cu reductanță (rezistență magnetică) R_m	
17	Pilă electrică sau acumulator de t.e.m. E și rezistență interioară r	 
18	Baterie electrică sau de acumulare	
19	Polaritatea pozitivă, respectiv negativă	
20	Rezistor variabil	  
21	Potențiomtru divizor de tensiune	
22	Voltmetru	
23	Bec electric	
24	Ampermetru	
25	Voltmetru	
26	Galvanometru	
27	Transformator	 
28	Motor electric rotativ	
29	Generator electric rotativ	
30	Redresor	
31	Triodă	
32	Tranzistor	
33	Diodă	
34	Intrerupător	

în problemă, dintr-un montaj obligatoriu sau dintr-un fenomen fizic. Iată câteva asemenea informații:

— Două sfere, dintre care una de volum $V_1 = 5 \text{ cm}^3$ și alta de volum $V_2 = 30 \text{ cm}^3$, sînt electrizate la fel.

Rezolvarea problemei ce conține această informație pretinde în continuare cunoașterea capacității acestor două corpuri și deci a razei lor, care poate fi obținută știind că volumul sferei este dat de relația: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

— Un ampermetru cu șunt de rezistență $R_s = 15 \Omega$ măsoară într-un circuit o intensitate $I = 100 \text{ A}$.

Această informație presupune cunoașterea modului în care se face măsurarea intensității cu ajutorul ampermetrului, care se leagă direct în circuit și a faptului că rezistența șunt se montează în paralel cu ampermetrul.

— Un corp de masă $m = 10 \text{ kg}$ cade liber, fără viteză inițială, de la înălțimea $h = 2 \text{ m}$.

În afară de informațiile directe cuprinse în acest fragment de enunț mai rezultă că, datorită fenomenului de cădere, corpul are o traiectorie rectilie și se mișcă uniform accelerat, informații care nu sînt date direct, dar sînt ușor de obținut de către cei ce stăpînesc fenomenul la care se referă problema.

2.3.2.3. Informații ascunse sînt acelea care se referă la mărimi folosite la rezolvarea unei probleme, dar care pînă la urmă fie că dispar (sînt eliminate pe parcursul rezolvării problemei) fie că rămîn înglobate în alte mărimi. Iată un exemplu de astfel de fragment de enunț:

— Două elemente galvanice, avînd fiecare tensiunea electromotoare $1,8 \text{ V}$, sînt montate în serie cu un fir de lungime $l = 2 \text{ m}$ și cu un voltmetru V alcătuit din două lame de oțel, într-o soluție diluată a unei sări de argint.

Informațiile ascunse care nu pot fi neglijate și care se referă la mărimi ce sînt eliminate pe parcursul rezolvării problemei sînt următoarele: elementele galvanice, ca orice generator de curent, au pe lîngă tensiune electromotoare și rezistență interioară, despre care problema nu spune nimic. De asemenea, voltmetrul V are în primul rînd o rezistență internă și, ținînd seama

de faptul că are electrolizii nesolubili, are și o tensiune contraelectromotoare, mărimi ce nu sînt precizate în problemă, nici sub formă de informații și nici ca necunoscute ale problemei.

2.3.2.4. Informații complexe. În multe probleme, și mai ales cele date la examene și concursuri, se întîlnesc frecvent informații mai cuprinzătoare, care se referă la schema sau montajul ce rezultă din enunțul problemei.

Prin aceasta se impune schemei sau montajului respectiv obținerea unor anumite performanțe (randament maxim, rezonanță, putere debitată sau consumată etc.), respectiv anumite poziții ale elementelor din schemă sau anumite valori ale mărimilor ce caracterizează aceste elemente (corpuri electrizate în contact, punte echilibrată, circuit deschis etc.).

Aceste informații se recunosc destul de ușor după formularea ce le este dată. Iată cîteva exemple:

— În cazul în care sursa de lumină ar trimite radiații conținînd liniile dubletului de rezistență al Na, cît de mare ar fi distanța pe ecran între...

— Admițînd că sistemul considerat se află mereu în echilibru termodinamic...

— ...Valoarea rezistenței R , știind că puterea dată de baterie în exterior este maximă.

— Dacă legătura la bornele acumulatorului este inversată, intensitatea curentului electric păstrează același sens și este egală cu...

— Cunoscînd faptul că întîlnirea a două mobile are loc o singură dată...

Informațiile dau posibilitatea scrierii unor relații între diferitele mărimi ce caracterizează elementele care intră în alcătuirea schemei unei probleme sau cele care rezultă direct din schema respectivă.

Aceste relații constituie tot atîtea ecuații necesare pentru calculul necunoscutelor unei probleme.

Din exemplele prezentate în lucrare va rezulta modul în care informațiile sînt folosite pentru scrierea unor asemenea ecuații.

În general toate informațiile dintr-o problemă sînt folosite la rezolvarea acesteia; rareori se întîmplă ca

într-un enunț să fie cuprinse informații care să rămână nefolosite pe parcursul rezolvării; în acest caz ele servesc la elucidarea enunțului sau constituie rezultatul unei lipse de grijă în formularea enunțului.

În multe probleme nu sînt cuprinse intenționat unele informații necesare rezolvării. În această categorie de informații intră o serie de constante fizice a căror cunoaștere este absolut obligatorie, ca spre exemplu: accelerația gravitației $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, permitivitatea absolută a vidului $\epsilon_0 = 8,856 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, permeabilitatea magnetică absolută $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$, permeabilitatea magnetică relativă a aerului și vidului $\mu_r = 1$, căldura specifică a apei $c_a = 4185 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$ masa specifică a apei $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ și altele.

2.3.2.5. În unele probleme anumite informații poartă denumirea de *condiții*. Spre exemplu condiția de echilibru, condiția de repaus, condiția ca o mărime să aibă o anumită valoare etc.

2.4. Date. Necunoscute. Cerute. Mărimile despre care enunțul problemei ne informează că au valori cunoscute (sau noi cunoaștem acest lucru) alcătuiesc *datele* problemei.

Totalitatea mărimilor ce apar pe parcursul calculelor și despre care enunțul nu ne informează că au valori cunoscute constituie *necunoscutele* problemei respective.

Totalitatea mărimilor ale căror valori sînt cerute într-o problemă constituie *cerutele problemei*; ele sînt în număr mai mic sau cel mult egal cu necunoscutele problemei, figurînd evident printre acestea din urmă.

La fel ca și datele, ce fac parte de altfel din informațiile unei probleme, necunoscutele se pot prezenta într-o mare varietate; ele pot fi: scheme, elemente de scheme, mărimi caracteristice și valori ale elementelor sau ale celor ce rezultă din legarea acestora în schemă, fenomene, performanțe ale unor scheme sau montaje, poziții ale diverselor elemente din scheme pentru realizarea unor anumite valori ale unor mărimi caracteristice ce interesează etc.

O parte din necunoscute pot fi cerute, altele pot să nu fie cerute în enunț, dar necesare pentru determinarea celor cerute.

În general, la rezolvarea unei probleme în care prin enunț, nu se cere decît determinarea anumitor mărimi (cerute), atenția celui ce rezolvă problema se va îndrepta către acestea, eliminînd pe parcursul rezolvării sistemului de ecuații ce conține toate necunoscutele problemei pe cele care nu sînt cerute în problema respectivă.

Cele trei părți principale ce intră în alcătuirea unui enunț, respectiv informațiile, ecuațiile și cerutele nu apar în enunț într-o ordine prestabilită; modul de apariție a lor în textul enunțului depinde de complexitatea problemei, de abilitatea celui ce o formulează și de alte necesități, ca formularea să fie cît mai clară, concisă, completă și exactă.

În continuare se prezintă cîteva exemple din care rezultă modul de identificare și de folosire al informațiilor dintr-o problemă în vederea rezolvării ei.

E2.1. Două mobile au mișcări rectilinii uniform variate pe aceeași dreaptă, cu accelerațiile a_1 și a_2 : ele sînt lansate din două puncte diferite distanțate între ele cu d , cu vitezele inițiale v_{10} și v_{20} la T secunde unul după altul. Se cere să se exprime condiția ca ele să se întâlnească:

- a) de două ori,
- b) o singură dată,
- c) niciodată [7].

Rezolvare. Informația, în toate cele trei cazuri, este aceeași: întîlnirea celor două mobile. Ea se traduce analitic astfel:

— la $t = \tau$ (ora necunoscută a întîlnirii) trebuie să avem $x_1 = x_2$ (coordonatele — nu spațiile parcurse — ale celor două mobile măsurate de la aceeași origine trebuie să fie egale).

Pentru punerea acestei condiții trebuie scrise în mod necesar ecuațiile de mișcare ale celor două mobile; alegînd ca origine a coordonatelor și a timpului, locul și momentul plecării primului mobil avem

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 + v_{10} t$$

$$x_2 = \frac{1}{2} a_2 (t - T)^2 + v_{20} (t - T) + d$$

unde mărimile $a_1, a_2, v_{10}, v_{20}, d$ pot fi pozitive sau negative iar T este pozitiv (mobilul al doilea pleacă după primul); avem:

$$x_1(\tau) = x_2(\tau)$$

sau

$$\frac{1}{2} a_1 \tau^2 + v_{10} \tau = \frac{1}{2} a_2 (\tau - T)^2 + v_{20} (\tau - T) + d$$

sau

$$(a_1 - a_2) \tau^2 + 2(v_{10} + a_2 T - v_{20}) \tau + 2v_{20} T - a_2 T^2 - 2d = 0.$$

Din această ecuație se obțin pentru τ două valori distincte, una sau niciuna după cum discriminantul ecuației în τ este pozitiv, nul sau negativ; valoarea lui Δ este

$$\Delta = (v_{10} + a_2 T - v_{20})^2 - (a_1 - a_2) (2v_{20} T - a_2 T^2 - 2d).$$

Condițiile cerute sînt deci:

- a) $\Delta > 0$
- b) $\Delta = 0$
- c) $\Delta < 0$.

O serie de cazuri particulare rezultă de aici prin anulara uneia sau mai multora dintre mărimile $a_1, a_2, v_{10}, v_{20}, d, T$.

E 2.2. Se consideră sistemul reprezentat în fig. E 2.2., aflat inițial în repaus și alcătuit din doi scripeți solidari unul cu celălalt, avînd razele R și r ($R > r$), de care atîrnă două fire la extremitățile cărora se află greutatea P și Q .

Se cere să se exprime condițiile pe care trebuie să le îndeplinească mărimile P, Q, R, r pentru ca să fie realizate următoarele fenomene:

- a) sistemul să continue să se afle în repaus;
- b) sistemul să înceapă să se miște;
- c) sistemul să înceapă să se miște în sensul invers acelor de ceasornic;
- d) idem în sens contrar.

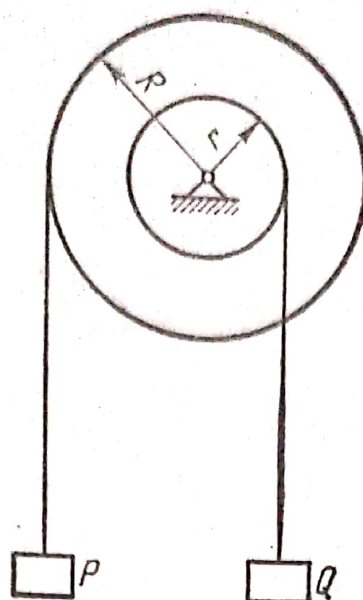


Fig. E 2.2

Rezolvare. Avem: a) condiția va exprima echilibrul momentelor greutateilor P și Q

$$PR = Qr;$$

b) nu se specifică în ce sens are loc mișcarea; condiția va exprima neechilibrul momentelor

$$PR \neq Qr;$$

c) mișcarea în sensul invers acelor de ceasornic; condiția va exprima că momentul greutății P este mai mare decât cel al greutății Q

$$PR > Qr;$$

d) idem, ținând seama de sens

$$PR < Qr.$$

E 2.3. Pe o suprafață orizontală perfect șlefuită se află două corpuri de mase egale m , legate între ele cu un arc de lungime l și constantă elastică k ; spre corpul din stînga se deplasează cu viteză mare v un al treilea corp, care are de asemenea masa m . Se cere să se demonstreze că cele două corpuri legate prin arc se vor mișca întotdeauna în același sens. Ciocnirea se consideră perfect elastică [15,4/72].

Rezolvare. Din ciocnirea perfect elastică a corpului cu viteza v și masa m cu corpul legat în partea stângă a arcului care are de asemenea masa m , rezultă că primul corp rămâne pe loc, iar cel de al doilea capătă imediat după ciocnire viteza v_1 . Rămân deci în discuție numai cele două corpuri legate între ele prin arc, care în momentul inițial ($t = 0$) au respectiv vitezele $v_{10} = v$ și $v_{20} = 0$ (fig. E 2.3).

Informația dată de enunț că viteza v este mare nu joacă nici un rol în rezolvarea problemei.

Informația că cele două corpuri se vor mișca întotdeauna (adică pentru orice $t > 0$) în același sens se transpune analitic astfel

$$v_1 \cdot v_2 > 0$$

pentru orice $t > 0$.

Evident, această condiție este independentă de sensul ales pe direcția mișcării; ea este îndeplinită fie că ambele viteze sînt pozitive, fie că ele sînt negative.

Deoarece ni se cere să demonstrăm această informație, înseamnă că condiția menționată nu trebuie impusă inițial celor două viteze, ci ea trebuie să rezulte din rezolvare, prin aplicarea metodelor de calcul corespunzătoare.

Pentru aceasta vom aplica următoarele două metode:

— metoda conservării impulsului și

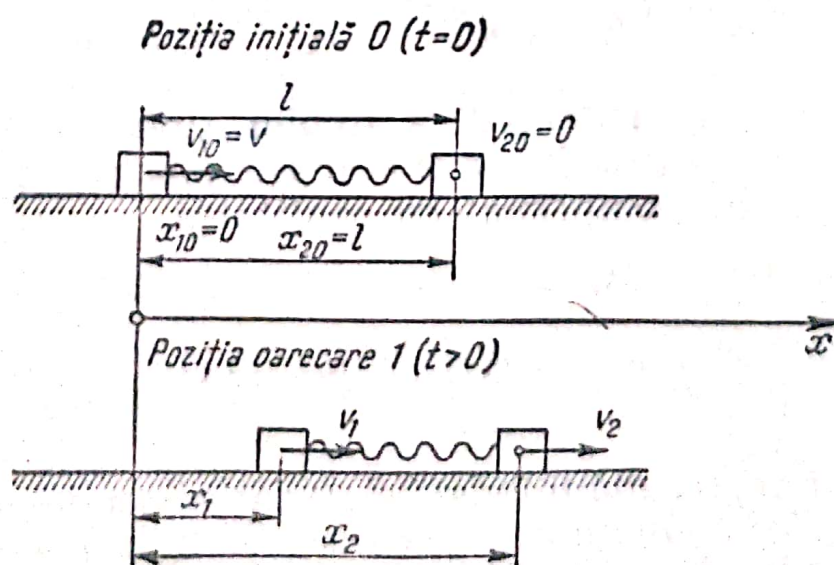


Fig. E 2.3

- metoda conservării energiei
- între cele două poziții arătate în fig. E 2.3 și anume:
- poziția inițială (la $t = 0$),
 - poziția oarecare (la $t > 0$, oarecare).

Asupra sistemului alcătuit din cele două corpuri și arc acționează următoarele forțe:

- greutatea celor două corpuri,
 - reacțiunile suprafeței orizontale
- tensiunea din arc fiind forță interioară.

Deoarece proiecțiile tuturor acestor forțe pe axa Ox sînt nule, rezultă că se poate aplica teorema conservării impulsului în raport cu această axă

$$(\sum m_i v_{ix})_1 = (\sum m_i v_{ix})_0$$

sau

$$mv + m \cdot 0 = mv_1 + mv_2$$

de unde rezultă

$$v = v_1 + v_2. \quad (1)$$

Deoarece nu există frecări și nici alte forțe care să provoace pierderi de energie, rezultă că energia totală (cinetică și potențială) a sistemului se conservă; variația energiei totale a sistemului între cele două poziții considerate este

$$\Delta E = E_1 - E_0 = \left(\frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} mv_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2} mv^2 \right).$$

Variația energiei potențiale a arcului, ținînd seama că el trece de la poziția liberă 0 la o altă poziție 1 în care este întins sau comprimat cu cantitatea

$$\Delta l = x_2 - x_1 - l,$$

$$\Delta \Pi = \frac{1}{2} k(x_2 - x_1 - l)^2.$$

Aceasta reprezintă totodată și variația energiei potențiale totale a sistemului, deoarece energia potențială a greutăților nu variază, întrucît ele se mișcă pe orizontală.

Rezultă

$$\Delta E + \Delta \Pi = 0$$

sau

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1 - l)^2 = 0$$

care conduce la

$$v_1^2 + v_2^2 - v^2 + \frac{k}{m} (x_2 - x_1 - l)^2 = 0. \quad (2)$$

Ridicînd la pătrat relația (1) se obține

$$v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 = v^2$$

sau

$$v_1^2 + v_2^2 = v^2 - 2v_1v_2$$

care, înlocuită în relația (2), conduce la

$$-2v_1v_2 + \frac{k}{m} (x_2 - x_1 - l)^2 = 0$$

$$v_1v_2 = \frac{k}{2m} (x_2 - x_1 - l)^2 > 0.$$

Aceasta constituie condiția care trebuia demonstrată; ea a rezultat din aplicarea celor două metode menționate.

E 2.4. Se consideră un corp de masă m așezat pe o masă orizontală, fără frecare, de care este prins un fir elastic avînd cealaltă extremitate legată de un punct fix. Constanta elastică a firului este k (fig. E.2.4).

Considerînd faptul că firul suportă o tensiune maximă T_0 , se cere să se determine viteza cu care poate fi lansat corpul în planul mesei astfel încît firul să nu se rupă.

Rezolvare. Informația „să nu se rupă” se traduce analitic prin

$$T_{max} \leq T_0 \quad (1)$$

unde T_{max} este tensiunea cea mai mare din firul elastic, care se atinge bineînțeles, atunci cînd firul este cel mai întins și corpul se află în acel moment în repaus.

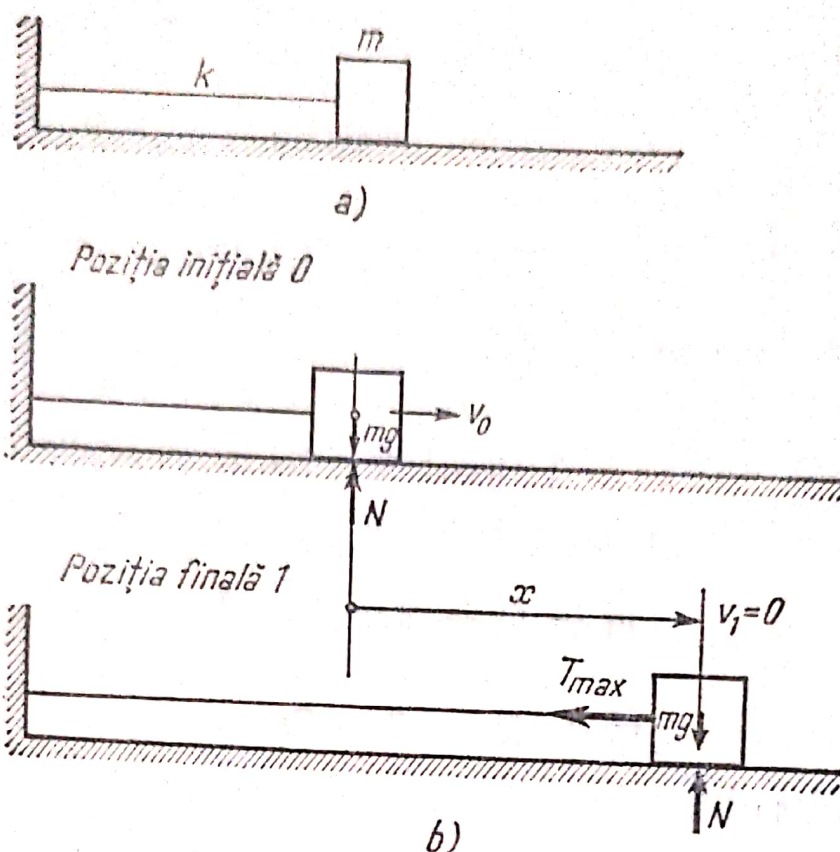


Fig. E 2.4

Aplicând metoda energiei (vezi cap. 3) între pozițiile inițială (firul neîntins, corpul lansat cu viteza v_0) și finală (firul întins la maximum, corpul aflat în acest moment în repaus) rezultă (fig. E 2.4, b)

$$\Delta E + \Delta \Pi = 0$$

în care

$$\Delta E = E_1 - E_0 = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\frac{1}{2} m v_0^2; \Delta \Pi = \frac{k x^2}{2},$$

deoarece energia potențială a corpului nu variază întrucât el se deplasează pe verticală (x este alungirea arcului). Rezultă

$$-\frac{1}{2} m v_0^2 + k \frac{x^2}{2} = 0$$

$$x = \pm v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Alegem soluția pozitivă care corespunde întinderii firului; soluția negativă corespunde situației în care în locul firului ar fi un arc comprimat.

Alungirii x a firului îi corespunde tensiunea

$$T_{\max} = kx = kv_0 \sqrt{\frac{m}{k}} = v_0 \sqrt{km}$$

cu care ecuația (1) devine

$$v_0 \sqrt{km} \leq T_0$$

de unde rezultă viteza cerută

$$v_0 \leq \frac{T_0}{\sqrt{km}}.$$

E 2.5. Pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală este lansat de jos în sus un corp, de masă m , cu viteza v_0 ; el parcurge pe plan o distanță l (fig. E 2.5).

Cum se poate recunoaște dacă între corp și plan există sau nu frecare?

În cazul în care există se cere să se determine coeficientul de frecare μ .

Aplicație: $\sin \alpha = 0,6$; $m = 5$ kg; $v_0 = 12$ m/s; $l = 10$ m; $g = 10$ m/s².

Rezolvare. Presupunem mai întâi că există frecare; se aplică metoda energiei sub forma

$$\Delta E + \Delta \Pi = L_f \quad (1)$$

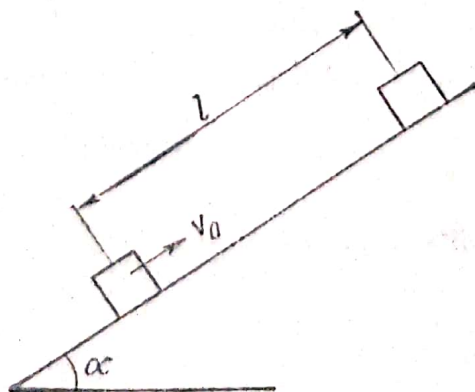


Fig. E 2.5

în care

$$\Delta E = E_1 - E_0 = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Delta \Pi = mgl \sin \alpha.$$

Ținând seama că întotdeauna L_f este o cantitate negativă rezultă că, în cazul în care există frecare, datele problemei trebuie să îndeplinească condiția

$$\Delta E + \Delta \Pi < 0$$

adică

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 + mgl \sin \alpha < 0$$

sau

$$v_0^2 > 2gl \sin \alpha.$$

Verificăm această condiție în cazul problemei de față

$$12^2 > 2 \times 10 \times 10 \times 0,6; \quad 144 > 120$$

deci există și frecare. Dacă nu ar fi existat frecare, în locul semnului $>$ ar fi trebuit pus semnul $=$; este ușor de observat că nu se poate pune semnul $<$, deoarece forțele de frecare dau totdeauna un lucru mecanic negativ.

Pentru determinarea coeficientului de frecare se înlocuiește în (1)

$$L_f = -\mu mgl \cos \alpha;$$

se obține

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 + mgl \sin \alpha = -\mu mgl \cos \alpha.$$

Rezultă

$$\mu = \frac{v_0^2 - 2gl \sin \alpha}{2gl \cos \alpha} = \frac{v_0^2}{2gl \cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha.$$

Avem

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8$$

cu care

$$\mu = \frac{144}{2 \times 10 \times 10 \times 0,8} - 0,75 = 0,9 - 0,75 = 0,15.$$

E 2.6. Neglijând rezistența aerului se cere să se determine timpul total de cădere al unui corp cunoscând că $1/n$ din înălțimea totală de cădere h este parcursă în ultimele m secunde. Se dau $n = 3$; $m = 1$ s [15].

Rezolvare. Se aplică metoda ecuațiilor de mișcare la care se ține seama de informațiile din enunț. Alegând originea coordonatelor în punctul din care se dă drumul corpului, orientând axa în jos și originea timpilor în momentul lansării, ecuația de mișcare a corpului este

$$x = \frac{1}{2} g t^2. \quad (1)$$

Când corpul atinge Pământul avem

$$t = t_1 \text{ și } x = h, \text{ adică}$$

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2. \quad (2)$$

Din informațiile problemei rezultă că la $t = t_1 - m$ corpul se află la distanța h/n de Pământ, deci are coordonata $x = h/n$; înlocuind în (1) obținem

$$h - \frac{h}{n} = \frac{1}{2} g (t_1 - m)^2$$

sau

$$h - \frac{h}{n} = \frac{1}{2} g t_1^2 + \frac{1}{2} g m^2 - g t_1 m.$$

Ținând seama de (2) rezultă

$$- \frac{h}{n} = \frac{1}{2} g m^2 - g t_1 m$$

sau ținând seama din nou de (2)

$$- \frac{1}{2n} g t_1^2 = \frac{1}{2} g m^2 - g t_1 m$$

sau

$$t_1^2 - 2mnt_1 + m^2n = 0$$

cu soluțiile

$$t_1' = m(n \pm \sqrt{n(n-1)})$$

reale pentru $n > 1$; numeric rezultă

$$t_1' = 5,45 \text{ s}; t_1'' = 0,55 \text{ s}$$

ambele nefiind posibile ($t_1'' < m$).

Observație. Exemplul de mai sus este inspirat din primul punct al problemei nr. 12519 din G.M., Seria B nr. 1/1973; din rezolvarea prezentată rezultă că nu era nevoie ca în enunțul problemei să fie dată masa corpului.

2.5. Rezolvare

2.5.1. *Generalități.* În general prin rezolvarea unei probleme se înțelege stabilirea mărimilor cerute în enunț și determinarea valorilor acestora, prin folosirea celor mai directe căi pentru atingerea acestui scop.

De cele mai multe ori, în vederea cunoașterii posibilităților sau a îmbunătățirii performanțelor unei scheme sau ale unor elemente componente ale acestora, este necesară discutarea și interpretarea matematică și fizică a rezultatelor.

În accepțiunea de mai sus rezultă că la rezolvarea unei probleme se pot distinge două etape: *rezolvarea propriu-zisă*, *verificarea și interpretarea rezultatelor*.

Rezolvarea propriu-zisă începe o dată cu cunoașterea enunțului și se termină cu stabilirea rezultatelor cerute.

La baza rezolvării unei probleme stau informațiile cuprinse în enunț. Acestea, după cum s-a arătat, sînt folosite la alcătuirea schemei și a relațiilor dintre mărimile caracteristice elementelor din schemă și a celor rezultate direct din aceasta.

Pentru determinarea mărimilor cerute în enunțul unei probleme pot fi folosite diferite metode de calcul. Cunoașterea acestora este deosebit de importantă,



deoarece prin aplicarea repetată a lor se formează și se dezvoltă raționamentul și gândirea logică. O metodă de calcul bine cunoscută și corect aplicată dă posibilitatea rezolvării sistematice a unui mare număr de probleme, aparent foarte diferite unele de altele.

Cărțile de fizică conțin puține referiri la această cale de rezolvare a problemelor, punând în evidență în mică măsură metodele și programele corespunzătoare. Deoarece aceste lucruri constituie obiectul unei alte părți din lucrare, am subliniat aici pe scurt numai locul și importanța lor.

La rezolvarea unei probleme, indiferent de etapa la care au fost căpătate cunoștințele cuprinse în enunț, este necesară folosirea *tuturor* cunoștințelor pe care cel ce o rezolvă le are la data rezolvării.

Aceasta înseamnă, de exemplu, că la rezolvarea unei probleme de mecanică ce face obiectul unui concurs de admitere într-un institut de învățământ superior, trebuie folosite și cunoștințele de matematici superioare dobândite ulterior anului de studii în care candidatul a căpătat cunoștințele de mecanică.

Neînțelegerea acestui lucru constituie una din marile dificultăți întâmpinate la asemenea concursuri.

Rezultă astfel necesitatea unei anumite pregătiri, care să aibă drept scop o reșezare a cunoștințelor și o punere de acord a celor dobândite cu ani în urmă cu cele dobândite ulterior.

Nesincronizarea tuturor cunoștințelor creează celui ce abordează o problemă de concurs impresia unui deosebit grad de dificultate, dar dacă se analizează conținutul și modul de rezolvare al acestuia niciuna din cunoștințele ce trebuie folosite nu-i sînt necunoscute.

În multe cazuri se constată că, deși se cunosc bine teoria și formulele de calcul, apar mari dificultăți cînd este vorba de transpunerea matematică a informațiilor din enunț. Dificultățile se datoresc în general lipsei de concordanță dintre cunoștințele dobândite anterior și cele de dată mai recentă, precum și convingerii că, pentru fizica din liceu, sînt suficiente cunoștințe elementare de matematică.

De obicei rezolvarea unei probleme se face literal, simbolizând diversele mărimi date în problemă cu litere. În cazul în care problema se pretează la aceasta, rezolvarea se poate face pentru un caz general, care permite mai multe concluzii și observații. Datele numerice se introduc numai pentru obținerea rezultatelor numerice finale.

De o deosebită importanță este verificarea și interpretarea rezultatelor obținute.

Verificarea se poate face prin:

- folosirea unei alte căi de rezolvare;
- particularizarea unei relații mai generale cunoscute;
- verificarea relației generale obținute pe un caz cunoscut;
- verificarea dimensională a formulelor stabilite.

În ceea ce privește interpretarea rezultatelor, aceasta poate fi de mai multe feluri. *Interpretarea fizică* a valorii unei mărimi are drept scop stabilirea sensului ei fizic. Astfel, de exemplu, valorile negative ale unei mărimi ca rezistența electrică, tensiunea electromotoare, capacitatea, inductanța, volumul, aria, suprafața, masa etc., în general nu au sens fizic.

Valorile negative ale unor mărimi pot avea sens fizic numai dacă la stabilirea relațiilor din care provin s-au făcut în prealabil anumite convenții în cadrul metodei aplicate, prin precizarea unui sens de referință luat în considerație la scrierea lor.

Uneori este necesară interpretarea fizică a unor relații matematice. Exemple:

- Punctul de intersecție al reprezentărilor grafice ale ecuațiilor de mișcare a două mobile în coordonate spațiu-timp, reprezintă locul și ora lor de întâlnire.

- Puterea maximă consumată într-un circuit de curent continuu atrage după sine faptul că rezistența interioară a sursei este egală cu rezistența exterioară a circuitului.

- Intensitatea maximă a curentului într-un circuit de curent alternativ conținând un rezistor, o inductanță și o capacitate în serie are loc atunci când se produce fenomenul de rezonanță.

Interpretarea fizică a valorilor obținute se poate face și prin compararea ordinului de mărime al rezultatului cu valorile mărimilor unor elemente cunoscute, apropiate ca dimensiuni, caracteristici și rol funcțional.

De asemenea, interpretarea fizică a unui rezultat se poate face și prin acceptările acestora pe baza experienței proprii. Astfel, de exemplu, dacă într-o problemă se cere greutatea unui om și aceasta rezultă, de exemplu, de 5 000 N, evident datele problemei, rezolvarea sau calculul numeric sînt greșite.

Prin urmare, rezolvarea reprezintă cea mai importantă fază de lucru a unei probleme, fază în care se verifică cunoștințele, capacitatea, posibilitățile, tehnica de lucru, gîndirea logică, raționamentul și observația.

2.5.2. Ordinea generală de rezolvare a unei probleme de fizică. 1) Pe baza informațiilor din enunț se alcătuiește o schemă care cuprinde elementele ce fac obiectul problemei respective și legăturile dintre ele.

2) Se detectează toate fenomenele care au loc în problema respectivă; spre exemplu: căderea unuia sau mai multor corpuri, schimb de căldură între două sau mai multe corpuri, mișcarea pe planul înclinat a unuia sau mai multor corpuri, stabilirea unor condiții de echilibru ș.a.m.d.

3) Se efectuează toate raționamentele corespunzătoare fiecăruia dintre fenomene în parte, precum și cele ce trebuie să existe între aceste fenomene. Spre exemplu, energia unui corp ce cade într-un vas cu apă încălzește apa din acel vas; căderea unui conductor pe un plan înclinat într-un cîmp magnetic produce în acest conductor un curent electric etc.

4) Se scriu ecuațiile tuturor acestor fenomene și cele ce rezultă din alte informații din enunțul problemei; relații între mărimile date și alte mărimi derivate, condiții impuse de enunț etc.

5) Rezolvînd acest sistem de ecuații se obțin valorile necunoscute din problema respectivă; se atrage atenția asupra faptului că rezolvarea literală este cea mai indicată, întrucît atunci cînd numărul de ecuații nu este prea mare ea permite separarea eventualelor

greșeli de rezolvare de cele de calcul numeric, precum și de cele provenind din transformarea unităților de măsură.

6) Se transformă toate valorile numerice ale mărimilor din problema respectivă în Sistemul Internațional. Este de observat faptul că, în unele probleme, pentru a se verifica dacă cel ce o rezolvă are cunoștințe de transformarea unităților, datele problemei sînt prezentate în diferite sisteme de unități.

7) Se înlocuiesc valorile numerice calculate la punctul precedent în rezultatul literal obținut la punctul 4, o dată cu aceasta rezultînd valorile numerice ale necunoscutelor din problema respectivă. Greșelile numerice nu pot apărea decît în această ultimă fază, dacă bineînțeles rezolvarea literală este corectă.

2.5.3. *Logica rezolvării unei probleme de fizică.* Din cele expuse anterior rezultă că deosebit de importantă în rezolvarea unei probleme de fizică este *logica* însușirii, de cele mai multe ori unică, a raționamentelor efectuate în scopul ajungerii la rezultatul final cerut în problema respectivă. Cel care rezolvă o anumită problemă de fizică descoperă de cele mai multe ori cu mare greutate această logică printre rîndurile unei prezentări foarte succinte a rezolvării problemei respective, în diferite manuale sau culegeri de probleme. De ce a procedat în acest fel și nu altfel? De ce a aplicat cutare sau cutare teoremă și nu alta? De ce a început rezolvarea cu aflarea unei anumite mărimi și nu a alteia? Iată numai cîteva din întrebările pe care și le pune în mod logic oricine dorește să se instruiască în diferite domenii ale fizicii. Ceea ce este mai grav este faptul că cititorul dornic să se instruiască, nedescoperind această logică, este tentat să creadă că ea nu există și că rezolvarea oricărei probleme de fizică nu este altceva decît o înșiruire mai mult sau mai puțin întîmplată de formule, meșteșugul de rezolvare al problemei respective fiind astfel redus la „nimerirea“ formulelor ce conduc la rezultat. Lucrurile stau însă cu totul altfel: fără o însușire logică de raționamente orice abordare a unei probleme de fizică este sortită de cele mai multe ori eșecului.

În cele ce urmează prezentăm o rezolvare detaliată a unei probleme în care este subliniată succesiunea logică a raționamentelor efectuate în acest scop cu ajutorul a o serie de întrebări și răspunsuri pe parcursul acestei rezolvări.

E 2.7. Se consideră sistemul reprezentat în fig. E 2.7, alcătuit din corpul 1, de masă M , rezemat pe un plan orizontal, de care este prinsă o extremitate a arcului 2 având masa neglijabilă și constanta elastică k , cealaltă extremitate a sa fiind prinsă la un alt corp 3, de masă m . Sistemul se află în planul vertical în poziția în care tensiunea din arc este nulă.

Se cere să se determine viteza minimă v_0 cu care trebuie aruncat corpul 3 vertical în sus astfel încât corpul 1 să se desprindă de planul orizontal.

Rezolvare. Începem rezolvarea problemei de la ultima informație: desprinderea corpului 1 de planul

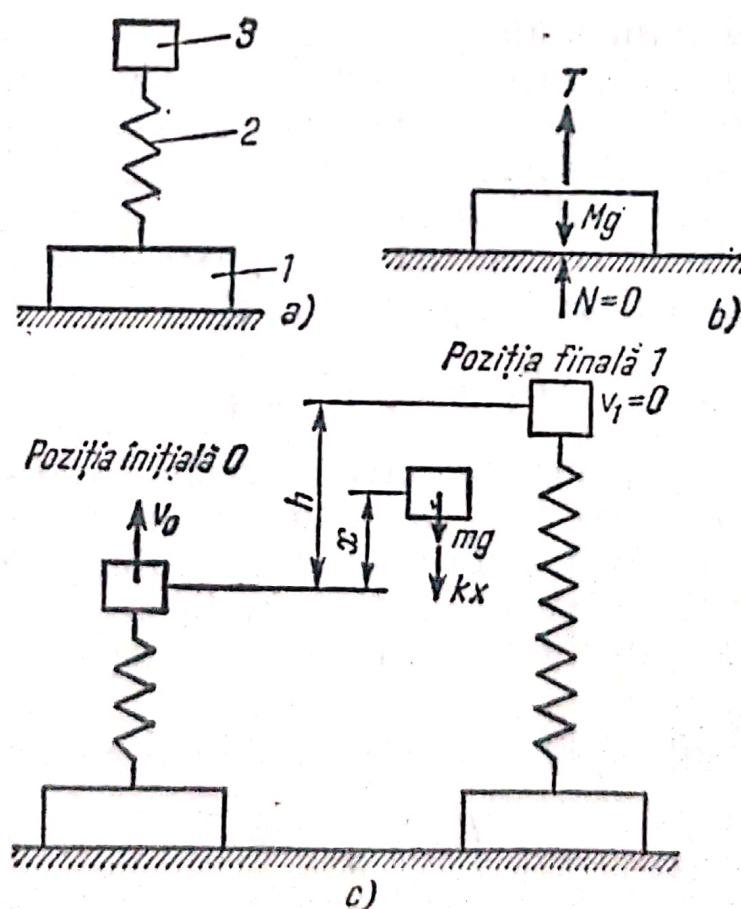


Fig. E 2.7

orizontal cu întrebarea: *ce se întâmplă în momentul desprinderii?*

Izolînd corpul 1 și reprezentînd forțele care îl acționează (fig. E 2.7, b) și anume greutatea sa Mg și tensiunea T din arc și ținînd seama că el se află în repaus deducem prin aplicarea metodei echilibrului valoarea tensiunii din arc

$$T = Mg. \quad (1)$$

Cunoscînd valoarea acestei tensiuni și știind că extremitatea inferioară a arcului este fixă ne punem în mod logic cea de a doua întrebare: *cu cît trebuie să se deplaseze extremitatea superioară a arcului (deci și corpul 3) pentru ca în arc să existe tensiunea T ?* În baza legii relației dintre tensiune și deformație, răspunsul la această întrebare este imediat: cu cantitatea

$$h = \frac{T}{k} = \frac{Mg}{k} \quad (2)$$

în care s-a ținut seama și de (1).

Cea de a treia întrebare care urmează în mod logic este: *ce viteză v_0 trebuie imprimată corpului 1 pentru ca el să parcurgă distanța h ?* Răspunsul la această întrebare îl căpătăm aplicînd metoda energiei între cele două poziții (inițială 0 și finală 1) ocupate de corpul 3 în timpul mișcării sale (fig. E 2.7, c)

$$E_1 = E_0 + L_{0-1} \quad (3)$$

în care E_1 și E_0 sînt respectiv energiile finală și inițială ale corpului 3, iar L_{0-1} suma lucrurilor mecanice efectuate de cele două forțe aplicate corpului 3: greutatea sa mg și tensiunea variabilă $T = kx$ din arc ($0 \leq x \leq h$) ambele orientate în jos, deci contrar deplasării corpului 3; obținem

$E_1 = 0$ (în această poziție corpul 3 se oprește)

$$E_0 = \frac{1}{2} mv_0^2$$

$$L_{0-1} = -mgh - \int_0^h kx \, dx = -mgh - \frac{kh^2}{2}.$$

Introducînd în (3) obținem

$$0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - mgh - \frac{kh^2}{2}$$

de unde

$$v_0 = \pm \sqrt{2gh + \frac{kh^2}{m}}$$

sau, ținînd seama de (2), rezultă final

$$v_0 = g \sqrt{\frac{M(M + 2m)}{km}}$$

care reprezintă rezultatul problemei.

2.5.4. Rezolvarea calitativă și cantitativă. Privită dintr-un alt unghi, rezolvarea unei probleme de fizică se prezintă sub forma a două etape care se succed în ordinea arătată în titlul acestui paragraf.

Înțelegem prin *rezolvarea calitativă* o rezolvare fenomenologică; ea constă în intuirea încă de la lectura enunțului a tuturor fenomenelor posibile ce apar în problema respectivă, a succesiunii, simultaneității, duratei și a conexiunilor dintre ele; o dată cu aceasta se elimină acele fenomene care nu au posibilitatea să se producă în condițiile problemei respective.

Rezolvarea calitativă constituie „scheletul” pe care se bazează întreg calculul ulterior, orientînd pe cel ce rezolvă o problemă de fizică spre metodele cele mai adecvate care trebuie aplicate, astfel încît pe parcurs să apară cît mai puține surprize.

Ca urmare a acestei rezolvări, el trebuie să știe cît mai amănunțit ce are de făcut în problema respectivă.

Rezolvarea cantitativă este alcătuită din ansamblul calculelor pe care cel ce rezolvă problema le are de efectuat în continuarea rezolvării calitative spre a răspunde cît mai precis la întrebările puse în enunțul problemei respective. Ea trebuie să se înscrie în limitele rezolvării calitative traducînd analitic toate concluziile acesteia.

În exemplul prezentat în continuare este ilustrată o asemenea rezolvare.

E 2.8. Două corpuri M_1 și M_2 sînt lansate simultan pe un plan orizontal, unul către celălalt, din două puncte A și B ($AB = d$) cu vitezele inițiale v_{01} și v_{02} . Între corpuri și plan există frecare, cu coeficienții de frecare μ_1 și μ_2 .

Se cere să se enumere toate fenomenele ce au loc în timpul mișcării celor două corpuri și să se determine condițiile pe care trebuie să le îndeplinească datele problemei pentru ca ele să se producă.

Aplicație: $d = 5$ m, $v_{01} = 10$ m/s, $v_{02} = 20$ m/s, $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 0,2$, $g = 10$ m/s².

Rezolvare. Pentru rezolvarea calitativă a problemei, din enunțul acesteia, sînt posibile următoarele situații:

a) Dacă distanța d din momentul lansării corpurilor este mare, vitezele inițiale mici și coeficienții de frecare sînt mari, cele două corpuri se mișcă uniform întârziat pînă la oprire, fără ca să se întâlnească, rămînînd unul față de celălalt la o anumită distanță.

Ordinea de oprire a lor poate fi întîi M_1 și apoi M_2 sau invers sau ambele se opresc simultan.

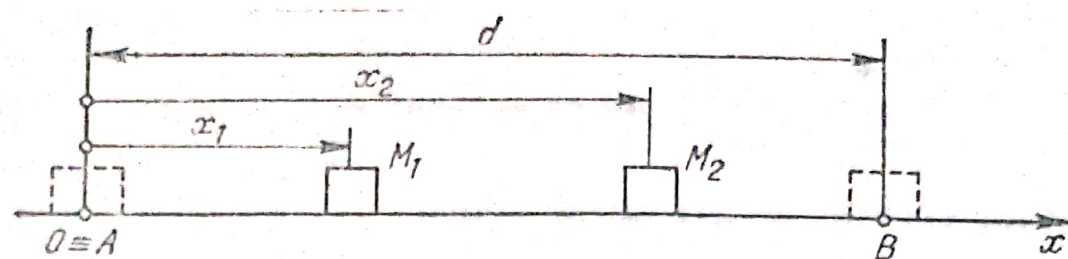
b) Dacă mărimile menționate mai sus au alte valori este posibil ca cele două corpuri să se oprească în același punct, în care ajung fie în ordinea 1—2, fie 2—1, fie simultan.

c) Dacă aceleași mărimi au alte valori este posibil ca cele două corpuri să se întâlnească *o singură dată* (sublinierea este necesară mai departe), după care se opresc, de asemenea, fie în ordinea 1—2, fie 2—1 sau simultan, în puncte diferite pe dreapta AB .

Alte fenomene nu sînt posibile: spre exemplu nu este posibil ca cele două corpuri să se întâlnească de două ori, deoarece din momentul opririi ele nu se mai pot întoarce.

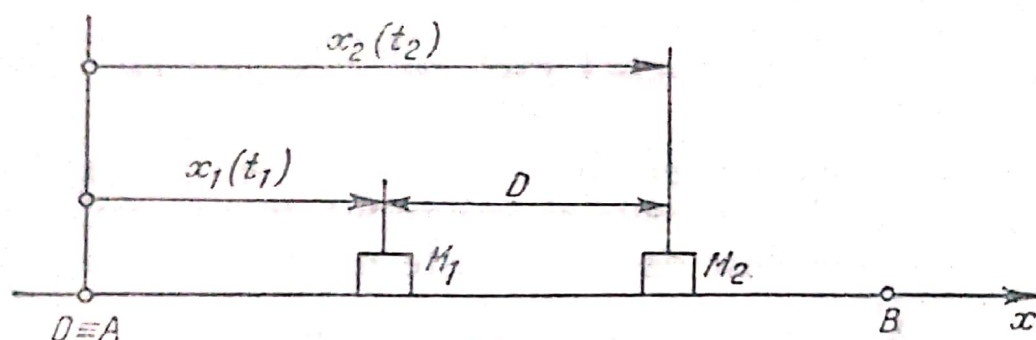
Pentru rezolvarea cantitativă (traducerea analitică a celor de mai sus) procedăm în modul următor:

Alegînd dreapta AB ca direcție a axei Ox cu originea în O ($O \equiv A$), orientată pozitiv de la A către B și originea timpului chiar momentul lansării celor două



a)

Poziția după oprirea ultimului corp



b)

Fig. E 2.8

corpuri, ecuațiile de mișcare ale lor sînt respectiv (fig. E 2.8, a)

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2} a_1 t^2 + v_{01} t \\ x_2 &= \frac{1}{2} a_2 t^2 - v_{02} t + d \end{aligned} \quad (1)$$

deoarece ambele corpuri au mișcări uniform întîrziate. Accelerația a_1 și a_2 se determină prin aplicarea metodei ecuației fundamentale a dinamicii; ele sînt

$$a_1 = \mu_1 g, \quad a_2 = \mu_2 g$$

cu care avem

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2} \mu_1 g t^2 + v_{01} t \\ x_2 &= \frac{1}{2} \mu_2 g t^2 - v_{02} t + d. \end{aligned}$$

Prima condiție pe care o punem este aceea ca cele două corpuri să se întîlnească, adică pentru $t = \tau$ să avem $x_1 = x_2$.

Rezultă

$$-\frac{1}{2}\mu_1 g \tau^2 + v_{01} \tau = \frac{1}{2}\mu_2 g \tau^2 - v_{02} \tau + d$$

adică ecuația de gradul al doilea

$$g(\mu_1 + \mu_2) \tau^2 - 2(v_{01} + v_{02}) \tau + 2d = 0 \quad (2)$$

cu soluțiile

$$\tau_{1,2} = \frac{v_{01} + v_{02} \pm \sqrt{(v_{01} + v_{02})^2 - 2gd(\mu_1 + \mu_2)}}{g(\mu_1 + \mu_2)}. \quad (3)$$

Întâlnirea celor două corpuri este posibilă dacă rădăcinile ecuației sînt reale și imposibilă în caz contrar. Ele nu se întîlnesc deci dacă este îndeplinită condiția

$$\Delta = (v_{01} + v_{02})^2 - 2gd(\mu_1 + \mu_2) < 0. \quad (4)$$

În acest caz se opresc la o distanță D unul de altul, care se calculează după cum urmează.

Vitezele celor două corpuri sînt

$$v_1 = -\mu_1 g t + v_{01}$$

$$v_2 = \mu_2 g t - v_{02}.$$

Oprirea primului corp are loc la momentul $t = t_1$ pentru care avem $v_1 = 0$ iar a celui de al doilea corp la momentul $t = t_2$ pentru care avem $v_2 = 0$; rezultă

$$-\mu_1 g t_1 + v_{01} = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_{01}}{\mu_1 g}$$

$$\mu_2 g t_2 - v_{02} = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{v_{02}}{\mu_2 g}.$$

Ordinea de oprire este 1-2 dacă $t_1 < t_2$ și 2-1 în caz contrar, adică 1-2, dacă

$$\frac{v_{01}}{\mu_1 g} < \frac{v_{02}}{\mu_2 g} \Rightarrow \frac{v_{01}}{\mu_1} < \frac{v_{02}}{\mu_2}, \quad (5)$$

2-1, dacă

$$\frac{v_{02}}{\mu_2 g} < \frac{v_{01}}{\mu_1 g} \Rightarrow \frac{v_{02}}{\mu_2} < \frac{v_{01}}{\mu_1}, \quad (6)$$

simultan, dacă

$$\frac{v_{02}}{\mu_2 g} = \frac{v_{01}}{\mu_1 g} \Rightarrow \mu_1 v_{02} = \mu_2 v_{01}. \quad (7)$$

În momentul opririi celor două corpuri au coordonatele

$$x_1(t_1) = -\frac{1}{2} \mu_1 g \left(\frac{v_{01}}{\mu_1 g} \right)^2 + v_{01} \left(\frac{v_{01}}{\mu_1 g} \right) = \frac{v_{01}^2}{2\mu_1 g}$$

$$x_2(t_2) = \frac{1}{2} \mu_2 g \left(\frac{v_{02}}{\mu_2 g} \right)^2 - v_{02} \left(\frac{v_{02}}{\mu_2 g} \right) + d = d - \frac{v_{02}^2}{2\mu_2 g}.$$

Distanța dintre cele două corpuri este în acest caz (fig. E 2.7, b)

$$D = x_2(t_2) - x_1(t_1)$$

deoarece $x_2(t_2) > x_1(t_1)$ întrucât corpurile nu s-au întâlnit; rezultă

$$D = d - \frac{v_{02}^2}{2\mu_2 g} - \frac{v_{01}^2}{2\mu_1 g}. \quad (8)$$

Rezultă pentru $D > 0$ că distanța dintre punctele A și B este mai mare decât suma spațiilor parcurse de cele două corpuri pînă la oprire:

$$d > \frac{1}{2g} \left(\frac{v_{02}^2}{\mu_2} - \frac{v_{01}^2}{\mu_1} \right).$$

Revenind la soluțiile (3) ale ecuației inițiale, dacă este îndeplinită condiția

$$\Delta = (v_{01} + v_{02})^2 - 2gd(\mu_1 + \mu_2) = 0;$$

ecuația admite rădăcina dublă

$$\zeta = \frac{v_{01} + v_{02}}{g(\mu_1 + \mu_2)} > 0. \quad (9)$$

În acest moment ele au coordonatele

$$x_1(\tau) = -\frac{1}{2} \mu_1 g \frac{(v_{01} + v_{02})^2}{g^2(\mu_1 + \mu_2)^2} + v_{01} \frac{v_{01} + v_{02}}{g(\mu_1 + \mu_2)} =$$

$$= \frac{(v_{01} + v_{02})[\mu_1(v_{01} - v_{02}) + 2v_{01}\mu_2]}{2g(\mu_1 + \mu_2)^2}$$

$$x_2(\tau) = \frac{1}{2} \mu_2 g \frac{(v_{01} + v_{02})^2}{g^2(\mu_1 + \mu_2)^2} - v_{02} \frac{v_{01} + v_{02}}{g(\mu_1 + \mu_2)} + d =$$

$$= \frac{(v_{01} + v_{02})[\mu_1(v_{01} - v_{02}) + 2v_{01}\mu_2]}{2g(\mu_1 + \mu_2)^2} = x_1(\tau)$$

în care s-a ținut seama de valoarea lui d obținută din condiția de anulare a discriminantului ecuației în τ .

Rezultatul este de așteptat deoarece valoarea lui τ a fost dedusă din egalarea coordonatelor celor două mobile; aflarea lui x_2 a constituit numai o verificare a rezultatelor.

Să nu uităm că cele două mobile nu ajung în punctul de întâlnire M , avînd coordonata $x_1(\tau) = x_2(\tau)$, decît la momentele diferite t_1 și t_2 , adică în ordinea 1—2 sau 2—1; în cazul în care ele ajung simultan, expresia

$$x_1(\tau) = x_2(\tau)$$

se simplifică devenind

$$x_1(\tau) = x_2(\tau) = \frac{(v_{01} + v_{02})v_{01}(\mu_1 + \mu_2)}{2g(\mu_1 + \mu_2)^2} = \frac{v_{01}(v_{01} + v_{02})}{2g(\mu_1 + \mu_2)} \quad (10)$$

în care s-a ținut seama de condiția opririi simultane.

Dacă pe lîngă condiția opririi simultane în punctul de ajungere se mai impune și condiția ca punctul de întâlnire să aibă o poziție dată, spre exemplu el să se afle între A și B astfel încît raportul

$$\frac{MA}{MB} = \lambda$$

unde λ este dat, mai rezultă o relație între datele problemei și anume

$$\frac{x_1(\tau)}{d} = \lambda$$

sau, ceea ce este totuna,

$$\frac{\lambda_2(\tau)}{d} = \lambda$$

unde d este dat de condiția de anulare a determinan-
tului; rezultă

$$\frac{v_{01}(v_{01} + v_{02})}{2g(\mu_1 + \mu_2)} = \frac{(v_{01} + v_{02})^2}{2g(\mu_1 + \mu_2)} \lambda$$

adică

$$v_{01} = \lambda(v_{01} + v_{02})$$

independentă de coeficienții de frecare μ_1 și μ_2 ; altfel
scris

$$v_{01}(1 - \lambda) - \lambda v_{02} = 0. \quad (11)$$

Spre exemplu dacă $\lambda = 0,5$ (întîlnirea cu oprire la
jumătatea distanței), avem condiția

$$v_{01} = v_{02}$$

condiție care atrage după sine din relația (7)

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu.$$

În cazul general ($\lambda \neq 0,5$) relația dintre coeficienții
de frecare se obține din ecuațiile (7) și (10)

$$v_{02} = \frac{\mu_2}{\mu_1} v_{01}$$

și deci

$$v_{01}(1 - \lambda) - \lambda \frac{\mu_2}{\mu_1} v_{01} = 0.$$

Presupunînd $v_{01} \neq 0$, rezultă

$$\mu_1(1 - \lambda) - \lambda \mu_2 = 0.$$

Vitezele celor două mobile în momentul $t = \tau$ au valo-
rile

$$v_1(\tau) = -\mu_1 g \frac{v_{01} + v_{02}}{g(\mu_1 + \mu_2)} + v_{01} = \frac{\mu_2 v_{01} - \mu_1 v_{02}}{\mu_1 + \mu_2}$$

$$v_2(\tau) = \mu_2 g \frac{v_{01} + v_{02}}{g(\mu_1 + \mu_2)} - v_{02} = \frac{\mu_2 v_{01} - \mu_1 v_{02}}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Se observă că

$$v_1(\tau) = v_2(\tau)$$

adică cele două mobile au în momentul întâlnirii aceeași viteză, fapt care constituie o proprietate a mișcării imprevizibilă din enunțul problemei. Cum cele două viteze trebuie să fie una pozitivă și cealaltă negativă în momentul întâlnirii rezultă că trebuie să avem neapărat

$$v_1(\tau) = v_2(\tau) = 0$$

ceea ce conduce la condiția cunoscută

$$\mu_1 v_{02} = \mu_2 v_{01}.$$

Cele două mobile ajung la întâlnire în același moment

$$t_1 = t_2 = \tau.$$

Revenind la ecuația inițială dacă este îndeplinită condiția

$$\Delta = (v_{01} + v_{02})^2 - 2gd(\mu_1 + \mu_2) > 0$$

ecuația (2) are rădăcini reale și distincte. Ar rezulta de aici că există posibilitatea a două întâlniri între mobile și anume la momentele τ_1 și τ_2 ($\tau_1 < \tau_2$) date de relațiile

$$\tau_1 = \frac{v_{01} + v_{02} - \sqrt{(v_{01} + v_{02})^2 - 2gd(\mu_1 + \mu_2)}}{g(\mu_1 + \mu_2)}$$

$$\tau_2 = \frac{v_{01} + v_{02} + \sqrt{(v_{01} + v_{02})^2 - 2gd(\mu_1 + \mu_2)}}{g(\mu_1 + \mu_2)}$$

Ambele valori ale lui τ_1 și τ_2 sînt pozitive ($\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$) ceea ce înseamnă că cele două mobile s-ar întâlni real (după momentul $t = 0$ al lansării) nu ipotetic ca atunci cînd una dintre valorile τ_1 sau τ_2 ar fi negative.

Aceasta rezultă imediat din examinarea sumei și produsului rădăcinilor ecuației inițiale

$$S = \frac{2(v_{01} + v_{02})}{g(\mu_1 + \mu_2)} > 0$$

$$P = \frac{2d}{g(\mu_1 + \mu_2)} > 0.$$

Concluzia aceasta contravine fenomenului fizic; explicația acestei contradicții constă în aceea că ecuațiile de mișcare nu sînt valabile decît din momentul inițial pînă în momentul opririi corpurilor, adică

$$x_1 = -\frac{1}{2} \mu_1 g t^2 + v_{01} t, \quad \left(0 \leq t \leq \frac{v_{01}}{\mu_1 g} \right)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \mu_2 g t^2 - v_{02} t + d, \quad \left(0 \leq t \leq \frac{v_{02}}{\mu_2 g} \right).$$

Introducînd în aceste ecuații valori superioare timpilor menționați rezultă că cele două corpuri efectuează mișcări de întoarcere, fapt care contravine fenomenului fizic.

Altfel spus, vitezele lor nu au voie să schimbe de sens, ceea ce înseamnă că trebuie să avem satisfăcute relațiile

$$v_1 \geq 0, \quad v_2 \geq 0$$

ceea ce conduce la aceleași restricții pentru variabila timp.

Rezultă deci că, din punct de vedere fizic, este valabilă numai prima rădăcină a ecuației de întîlnire, adică cea mai mică (τ_1).

Tot astfel se pot calcula și în acest caz: coordonatele în momentul întîlnirii

$$x_1(\tau_1) = x_2(\tau_1) > 0;$$

vitezele în momentul întîlnirii

$$v_1(\tau_1) > 0, \quad v_2(\tau_1) > 0;$$

coordonatele în momentul opririi

$$x_1(t_1) > 0; \quad x_2(t_2) \leq 0; \quad x_2(t_2) < x_1(t_1).$$

Distanța dintre cele două mobile după oprirea ultimului corp

$$D_1 = x_1(t_1) - x_2(t_2) > 0.$$

În cazul aplicației avem

$$\Delta = (10+20)^2 - 2 \times 10 \times 52(0,2+0,2) = 484 > 0.$$

Ne aflăm deci în ultimul caz. Rezultă

$$\tau_1 = \frac{30 - \sqrt{484}}{4} = 2 \text{ secunde}$$

$$x_1(\tau_1) = -0,5 \times 0,2 \times 10 \times 4 + 10 \times 2 = 16 \text{ m}$$

$$x_2(\tau_1) = 0,5 \times 0,2 \times 10 \times 4 - 20 \times 2 + 52 = 16 \text{ m}$$

$$x_2(\tau_1) = x_1(\tau_1) > 0$$

$$v_1(\tau_1) = -0,2 \times 10 \times 2 + 10 = 6 \text{ m/s} > 0$$

$$v_2(\tau_1) = 0,2 \times 10 \times 2 - 20 = -16 \text{ m/s} < 0$$

$$t_1 = \frac{10}{0,2 \cdot 10} = 5 \text{ secunde} > 0$$

$$t_2 = \frac{20}{0,2 \cdot 10} = 10 \text{ secunde} > 0$$

$$x_1(t_1) = -0,5 \times 0,2 \times 10 \times 5^2 + 10 \times 5 = 25 \text{ m} > 0$$

$$x_2(t_2) = 0,5 \times 0,2 \times 10 \times 10^2 - 20 \times 10 + 52 = -48 \text{ m} < 0$$

$$D_1 = x_1(t_1) - x_2(t_2) = 25 - (-48) = 73 \text{ m} > 0.$$

2.6. Programul general de rezolvare a unei probleme.

Conducerea în detaliu a calculelor necesare rezolvării unei probleme se poate efectua organizat cu ajutorul unui *program*.

Programul general de rezolvare a unei probleme conține un număr de programe componente, fiecare răspunzând unei anumite cerințe ridicate de etapele parcurse în vederea obținerii rezultatelor cerute în problema respectivă. Aceste programe sînt (fig. 2.2):

- programul de informare generală;
- programul metodei de rezolvare;
- programul de calcul;
- programul de verificare;
- programul de interpretare.

Cu excepția programului metodei de rezolvare, care este descris în detaliu pentru fiecare metodă în parte

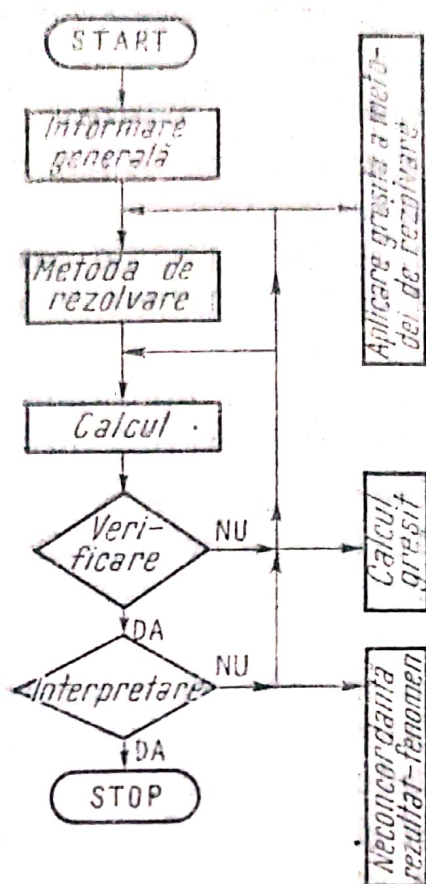


Fig. 2.2

În capitolul 3, sarcinile celorlalte programe sînt prezentate în cele ce urmează.

2.6.1. *Programul de informare generală.* Sarcinile acestui program sînt acelea care rezultă dintr-o primă luare de contact cu problema respectivă. Cu această ocazie, din lectura atentă a problemei se pun în evidență următoarele:

a) fenomenele principale care au loc în problema respectivă (de intuirea cît mai amănunțită a tuturor fenomenelor depinde succesul rezolvării problemei);

b) fenomenele secundare (de exemplu frecări, încălziri) despre care enunțul ne informează că pot fi neglijate sau nu spune nimic și deci nu le luăm în considerare;

c) sistemele materiale care participă la desfășurarea tuturor fenomenelor din problemă, proprietățile lor și legăturile dintre ele;

d) mărimile fizice și geometrice care sînt atașate fenomenelor și obiectelor respective, grupate în mărimi *date*, mărimi *necunoscute* și mărimi *cerute*;

e) schema de calcul, care constituie scheletul pe care se vor face toate raționamentele logice în decursul calculului; proprietățile și relațiile care rezultă dintr-o primă examinare a ei pot conduce la noi date, necunoscute și cerute;

f) punerea în evidență a metodelor care vor folosi în continuare la rezolvarea problemei.

Acestea sînt principalele puncte ale acestui program al cărui scop este acela de a orienta, în mare, rezolvarea problemei respective pe calea cea mai eficientă către soluția finală.

2.6.2. *Programul metodei de rezolvare.* Sarcinile programelor principalelor metode de rezolvare sînt descrise în detaliu la capitolul următor.

2.6.3. *Programul de calcul.* O dată obținute ecuațiile de rezolvare, care conțin mărimile *date*, *necunoscute* și *cerute* în problema respectivă, urmează rezolvarea lor din punct de vedere matematic, în vederea obținerii rezultatelor *cerute*.

În general — după cum s-a mai arătat — rezolvarea se desfășoară în următoarele trei etape:

- rezolvarea literală;
- transpunerea tuturor mărimilor ce interesează rezolvarea într-un sistem coerent de unități (de regulă, unitățile SI);
- rezolvarea numerică.

Rezolvarea literală a unei probleme înseamnă prezentarea mărimilor *cerute* sub forma unor relații, de regulă explicite, între aceste mărimi și datele problemei; nu este exclusă nici prezentarea unor relații implicite între mărimile *cerute* și cele *date* în problema respectivă, atunci cînd prezentarea explicită nu este posibilă.

Este deosebit de important faptul ca rezolvarea literală a sistemului de ecuații să fie efectuată pe calea cea mai simplă, elegant, economic, fără a complica în mod inutil calculele.

Rezolvarea trebuie să aibă în vedere tot timpul obținerea cerutelor din problema respectivă și eliminarea cât mai rapidă din calcule a celorlalte necunoscute.

Nu se recomandă rezolvări mixte literal-numerice, cu folosirea de simboluri pentru anumite mărimi și a valorilor numerice pentru altele în aceleași relații, deoarece aceasta face imposibilă verificarea rezultatelor pe criteriul dimensional.

În cazurile în care calculul literal este foarte complicat se renunță la folosirea simbolurilor, trecându-se direct la rezolvarea numerică; aprecierea unor astfel de situații o face numai cel care rezolvă problema în funcție de complexitatea calculelor.

Este recomandabil ca acest procedeu să fie aplicat doar în situații bine justificate, deoarece calculul literal oferă avantajul unor simplificări pe parcurs, precum și pe cel al unei ușoare verificări.

Spre a testa cunoștințele celui care rezolvă problema în domeniul unităților de măsură și al relațiilor dintre ele, mărimile dintr-o problemă pot fi date în diverse sisteme de unități de măsură, multipli sau submultipli ai acestora; de aceea, în cea de a doua etapă a aplicării acestui program este necesară transpunerea valorilor tuturor mărimilor folosite în problema respectivă în același sistem de unități. O dată efectuată această transpunere, ele vor fi înlocuite *pozițional* în rezultatele literale obținute în prima etapă a acestui program.

Trebuie remarcat faptul că în anumite probleme valorile datelor sînt prezentate direct numeric, fără o notare simbolică prealabilă care să dea posibilitatea unei rezolvări literale; în aceste cazuri ele se vor simboliza pe parcurs.

De asemenea, trebuie menționat faptul că necunoscutele autoeliminabile (cele care dispar în timpul calculului prin reduceri sau simplificări) trebuie notate în prealabil tot de cel care rezolvă problema respectivă.

În încheiere putem spune că o problemă de fizică bine concepută poate pune la grea încercare îndemînarea de calcul și cunoștințele matematice ale celui care o rezolvă; de aceea recomandăm multă atenție, prudență și grijă în aplicarea acestui program.

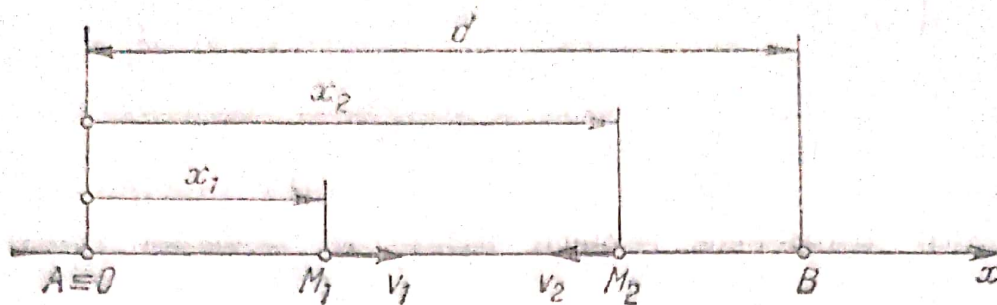


Fig. E 2.9

Ca exemplu prezentăm o problemă de cinematică ce conține o subtilitate din punctul de vedere al celor arătate.

E 2.9. La ora 9 pleacă din gara A un tren M_1 spre gara B, iar la ora 10 și 12 minute pleacă din gara B un alt tren M_2 spre gara A. Ambele trenuri se deplasează cu viteze constante.

Ele se întâlnesc la ora 10 și 20 de minute, după care trenul M_1 merge în continuare spre gara B, iar trenul M_2 merge pînă la gara A și se întoarce spre gara B fără oprire și cu aceeași viteză.

Cunoscînd faptul că ambele trenuri ajung simultan în gara B se cere ora sosirii ambelor trenuri în această gară.

Rezolvare. Înainte de a începe rezolvarea remarcăm că această problemă conține multe necunoscute (vitezele ambelor trenuri, distanța dintre gări) distoînd prin aceasta cu alte probleme. Trecînd peste această remarcă vom alege ora 9 drept oră zero notînd celelalte ore astfel

$$t_1 = 10^h 12' - 9^h = 1^h 12' = 72'$$

$$t_2 = 10^h 20' - 9^h = 1^h 20' = 80'$$

t_3 = ora necunoscută a sosirii simultane a ambelor trenuri în gara B.

În final vom avea grijă să adăugăm rezultatelor ora 9 (ora zero). Folosind metoda ecuațiilor de mișcare, ecuațiile care descriu mișcările celor două trenuri M_1 și M_2 sînt (fig. E 2.9)

$$M_1 : x_1 = v_1 t$$

$$M_2 : x_2 = -v_2(t - t_1) + d \quad (\text{ducere})$$

în care v_1 și v_2 reprezintă vitezele celor două trenuri, iar d distanța dintre gările A și B .

Ultima ecuație descrie mișcarea de ducere a trenului M_2 ; spre a găsi ecuația care descrie mișcarea de întoarcere procedăm astfel: fie t' ora ajungerii trenului M_2 în gara A ; avem:

$$\text{la } t = t', \quad x_2 = 0$$

adică

$$0 = -v_2(t' - t_1) + d.$$

Rezultă

$$t' = t_1 + \frac{d}{v_2}.$$

Ecuația de întoarcere a trenului M_2 este ecuația unui mobil care pleacă din originea $O \equiv A$ la ora $t = t'$, adică

$$x_2 = v_2(t - t').$$

Înlocuind valoarea lui t' și efectuînd calculele obținem

$$x_2 = v_2(t - t_1) - d \quad (\text{întoarcere}).$$

Folosind prima informație din enunț (întîlnirea) obținem:

$$\text{pentru } t = t_2, \quad x_1 = x_2 \text{ (ducere)}$$

$$\text{adică} \quad v_1 t_2 = -v_2(t_2 - t_1) + d. \quad (1)$$

Folosind cea de a doua informație (ajungerea simultană) obținem:

$$\text{pentru } t = t_3, \quad x_1 = d \text{ și } x_2 \text{ (întoarcere)} = d$$

$$\text{adică} \quad v_1 t_3 = d \quad (2)$$

$$v_2(t_3 - t_1) - d = d. \quad (3)$$

După mici prelucrări ale ecuațiilor (1), (2) și (3) obținute ca urmare a aplicării metodei ecuațiilor de mișcare, acestea devin

$$(v_1 + v_2)t_2 - v_2 t_1 - d = 0 \quad (1')$$

$$v_1 t_3 = d \quad (2')$$

$$v_2(t_3 - t_1) = 2d. \quad (3')$$

În acest moment se pune problema aplicării programului de calcul; în mod firesc, înainte de a începe aplicarea acestui program facem următoarea observație: avem de rezolvat un sistem de trei ecuații cu patru necunoscute v_1 , v_2 , t_3 și d .

O examinare rapidă a situației ne duce la concluzia că problema este nedeterminată. Găsirea unei noi ecuații nu mai este posibilă, deoarece am epuizat toate informațiile problemei. Dacă însă ne raportăm la una din indicațiile date în prezentarea acestui program și anume la aceea care spune că *la rezolvare trebuie să urmărim nu determinarea mărimilor necunoscute, ci a celor cerute*, situația se schimbă.

Aproape paradoxal, dar acest sistem de ecuații nedeterminat din punct de vedere al mărimilor necunoscute devine determinat din punct de vedere al mărimilor cerute, în cazul nostru ora t_3 . Ghidîndu-ne după această idee obținem succesiv:

— din (2') rezultă

$$v_1 = \frac{d}{t_3};$$

— din (3') rezultă

$$v_2 = \frac{2d}{t_3 - t_1}.$$

Înlocuind aceste rezultate în (1') rezultă

$$\left(\frac{d}{t_3} + \frac{2d}{t_3 - t_1}\right)t_2 - \frac{2d}{t_3 - t_1}t_1 - d = 0.$$

Constatăm cu surprindere că, deși această ecuație are două necunoscute (d și t_3), una dintre ele și anume distanța d se simplifică și rămîne o singură ecuație cu o singură necunoscută (t_3); nedeterminarea este astfel transmisă celorlalte necunoscute, care nu sînt cerute în problemă. Rezultă

$$\left(\frac{1}{t_3} + \frac{2}{t_3 - t_1}\right)t_2 - \frac{2t_1}{t_3 - t_1} - 1 = 0.$$

Deoarece $t_3 \neq t_1$ și $t_3 \neq 0$, putem scrie

$$(t_3 - t_1 + 2t_3)t_2 - 2t_3t_1 - t_3(t_3 - t_1) = 0$$

sau

$$t_3^2 + t_3(t_1 - 3t_2) + t_1t_2 = 0.$$

În acest moment înlocuim valorile numerice deoarece rezolvarea ulterioară se complică în mod inutil (citi-torul poate proba aceasta); obținem ecuația

$$t_3^2 - 168 t_3 + 5760 = 0$$

cu soluțiile

$$t_3 = 84 \pm \sqrt{1296};$$

rezultă

$$t'_3 = 120' \text{ și } t''_3 = 48'$$

cu observația că cea de a doua soluție nu este posibilă, deoarece ea se situează înainte de întâlnirea celor două trenuri.

Rămîne deci soluția

$$t'_3 = 120' = 2 \text{ ore.}$$

Ținînd seama că ora 9 a fost luată în mod convențional în calcule drept oră zero — rezultă că ambele trenuri sosesc în gara *B* la ora 11.

Iată deci — și acesta este numai un exemplu din multe altele care se pot da — cum o problemă aparent nerezolvabilă din cauza numărului mic (dar suficient) de informații, devine rezolvabilă dacă se examinează ceva mai în profunzime structura ecuațiilor care descriu fenomenele ce au loc în problema respectivă.

2.6.4. *Programul de interpretare.* Sarcina fundamen-tală a acestui program constă în corelarea rezulta-telor obținute, ca urmare a aplicării programului de rezolvare, cu aspectul fizic al fenomenelor studiate în problema respectivă.

Este cunoscut faptul că — de cele mai multe ori — o parte din rezultatele obținute în procesul de calcul se situează în afara domeniului căruia îi aparțin fenome-nele fizice dintr-o problemă: rezolvitorul trebuie să aibă deosebita grijă ca aceste rezultate — valabile din punct de vedere matematic — să nu apară totuși ca soluții ale problemei, deoarece ele nu au un cores-pondent fizic real. Orice asemenea rezultat care nu

este justificat din punct de vedere fizic trebuie înlăturat, menționindu-se totodată și motivul acestei înlăturări.

Cele de mai sus se referă bineînțeles la *interpretarea fizică* a rezultatelor obținute prin calcul; la fel de importantă, dar mai ușor de sesizat, de regulă, este *interpretarea matematică* a acestor rezultate. La baza acestei interpretări se află corelarea rezultatelor obținute prin calcul cu limitările de natură matematică impuse diferitelor expresii ale acestor rezultate; în mod natural, folosind aceste criterii, câmpul de valabilitate al rezultatelor se restrânge de asemenea, o parte din soluțiile problemei devenind nefolosibile.

În final, aplicarea celor două criterii fizic și matematic trebuie să conducă la alegerea din totalul rezultatelor obținute prin calcul numai a acelor care sînt posibile, atît din punct de vedere fizic, cît și din punct de vedere matematic.

În cele ce urmează vom prezenta cîteva aspecte ale acestui program.

2.6.4.1. Discernerea între mai multe valori pe criterii fizice. În anumite probleme, în care este evident din punct de vedere fizic că soluția este unică, se obțin din calcul mai multe valori. Este necesară eliminarea acelor care nu corespund fenomenului fizic studiat: aceasta se face prin analiza atentă a fenomenelor ce au loc în problema respectivă, cum se va arăta în cele ce urmează.

E 2.10. O bilă de volum v și masă specifică ρ_c , este lăsată să cadă fără viteză inițială, într-un vas ce conține un lichid de densitate ρ_l ($\rho_l < \rho_c$). Știind că adîncimea lichidului din vas este h se cere să se determine intervalul de timp necesar ajungerii bilei de la suprafața lichidului la fundul vasului.

Rezolvare. Deoarece $\rho_l < \rho_c$ și bila este plină, ea va cădea spre fundul vasului descriind o mișcare rectilinie uniform accelerată.

Într-adevăr, aplicînd relația $m\vec{a} = \vec{F}$ și proiectînd-o pe verticala descendentă, deducem (fig. E 2.10)

$$m a_x = F_{x_2} \quad \rho_c v a = \rho_c v g - \rho_l v g$$

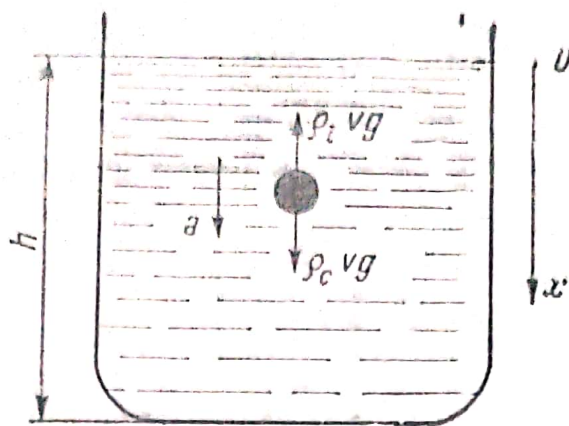


Fig. E 2.10

în care s-a presupus accelerația a orientată pe verticala descendentă, rezultă

$$a = g \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c} \right)$$

care este pozitivă, adică orientată așa cum am presupus (în jos) pentru $\rho_l = \rho_c$, $a = 0$, iar pentru $\rho_l < \rho_c$, $a < 0$, adică orientată în sus),

Ecuția de mișcare a bilei raportată la verticala descendentă, cu originea la suprafața lichidului, este

$$x = \frac{1}{2} g \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c} \right) t^2 \quad (1)$$

deoarece la $t = 0$, avem $x_0 = 0$, $v_0 = 0$.

Ora ajungerii la fundul vasului (egală cu intervalul de timp necesar străbaterii lichidului de către bilă) se află din condiția:

$$\text{pentru } t = t_1, x = h$$

adică din relația

$$h = \frac{1}{2} g \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c} \right) t_1^2.$$

Rezultă

$$t_1 = \pm \sqrt{\frac{2h}{g \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c} \right)}}.$$

Evident, dintre cele două soluții o alegem numai pe cea pozitivă, deoarece soluția negativă ar semnifica

faptul că bila a ajuns la fundul vasului înainte ca noi s-o lăsăm să cadă (timp negativ înseamnă o oră anterioară începerii fenomenului). Soluția negativă se elimină pentru că ea nu are un corespondent fizic real. Avem deci în final

$$t_1 = + \sqrt{\frac{2h}{g \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c}\right)}}. \quad (2)$$

Lucrurile se complică puțin dacă bila este lăsată să cadă în vas imprimându-i-se totodată și o viteză v_0 orientată pe verticala descendentă. Ecuația de mișcare este în acest caz

$$x = \frac{1}{2} g \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c}\right) t^2 + v_0 t \quad (3)$$

unde, înlocuind $t = t_1$ și $x = h$, obținem ecuația de gradul al doilea

$$\frac{1}{2} g \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c}\right) t_1^2 + v_0 t_1 - h = 0. \quad (4)$$

Este evident că, din punct de vedere fizic, bila ajunge la fundul vasului la o oră determinată; în cazul în care această ecuație are două rădăcini distincte și reale, ne punem întrebarea pe care dintre ele o acceptăm ca soluție a problemei?

Excludem de la început cazul în care cele două rădăcini sînt fie ambele negative, fie imaginare; nici una din aceste situații nu corespunde fenomenului fizic studiat. În acest caz trebuie verificate calculele spre a descoperi greșala.

Dacă una din rădăcini este pozitivă și cealaltă este negativă, în baza raționamentului de mai înainte o alegem pe cea pozitivă.

Dacă ambele rădăcini sînt egale (rădăcină dublă), atunci aceasta este și soluția problemei.

Ce se întîmplă însă atunci cînd ambele rădăcini sînt reale și pozitive? S-ar părea că nu avem nici un criteriu de a discerne între ele, adică ambele sînt soluții. Și totuși, fenomenul fizic are o singură soluție!

Pentru a explica această situație trebuie să observăm că într-o mișcare uniform întârziată corpul se deplasează din poziția inițială până în poziția cea mai depărtată de aceasta, unde viteza se anulează, după care el revine: rezultă deci că pe traiectoria sa există o infinitate de puncte prin care el trece de două ori (cele situate între poziția inițială și poziția extremă), un punct prin care trece o singură dată (punctul extrem) și o infinitate de puncte prin care nu trece niciodată (punctele situate dincolo de poziția extremă); mișcarea fiind descrisă de ecuația

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$$

punctele menționate mai sus corespund soluțiilor pentru care se înlocuiesc $x = l$ (coordonata punctului prin care trece mobilul) și $t = t_1$ (ora la care trece). Rezultă ecuația de gradul al doilea în t_1

$$a t_1^2 - 2v_0 t_1 + 2l = 0$$

cu soluțiile

$$t_1 = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2al}}{a}$$

reale și distincte, reale și confundate sau imaginare, după cum

$$v_0^2 - 2al \gtrless 0.$$

Presupunând că mărimile v_0 , a și l sînt pozitive, rezultă că întotdeauna suma $(2v_0/a)$ și produsul $(2l/a)$ sînt pozitive, deci rădăcinile ecuației sînt ambele pozitive, una mai mică și cealaltă mai mare, corespunzător celor două treceri ale mobilului prin punctul de coordonată $x = l$.

Cum în problemă bila nu poate ajunge la fundul vasului decît o singură dată, vom alege ca soluție rădăcina cea mai mică, adică

$$t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2g \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c}\right) h}}{g \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c}\right)}.$$

Această interpretare trebuie efectuată deoarece ecuația de mișcare descrie fenomenul cinematic în totalitatea lui, neputînd sesiza o serie de elemente, cum ar fi spre exemplu, în această problemă, fundul vasului; din punct de vedere al ecuației de mișcare a bilei, fundul vasului este un punct prin care bila trece atît la ducere cît și la întoarcere.

O situație similară întîlnim și în rezolvarea exemplului E 1.1, pe care o continuăm aici. Ecuația obținută era

$$\rho g x^2 - (p_0 + \rho g l)x + h(p_0 + \rho g h - \rho g l) = 0.$$

Înlocuind valoarea presiunii atmosferice

$$p_0 = \rho g H$$

unde H reprezintă înălțimea coloanei de mercur corespunzătoare și profitînd de faptul că în această experiență lichidul folosit este tot mercurul, simplificăm ecuația cu ρg și obținem

$$x^2 - (H + l)x + h(H + h - l) = 0. \quad (1)$$

Rezultă

$$x_{1,2} = \frac{H + l \pm \sqrt{(H + l)^2 - 4h(H + h - l)}}{2}.$$

Înlocuind valorile numerice obținem

$$\begin{aligned} x &= \frac{0,75 + 0,70 \pm \sqrt{1,45^2 - 4 \cdot 0,2(0,75 + 0,2 - 0,7)}}{2} = \\ &= \frac{1,45 \pm \sqrt{1,90}}{2} = \frac{1,45 \pm 1,38}{2}. \end{aligned}$$

Deci

$$x_1 = 1,415 \text{ m}, \quad x_2 = 0,35 \text{ m}.$$

Prima soluție trebuie exclusă, deoarece înălțimea coloanei de mercur nu poate depăși lungimea tubului, condiție care nu este menționată în enunț, dar care este evidentă

$$x < l.$$

Rămîne deci ca soluție

$$x = 0,05 \text{ m.}$$

O altă posibilitate de rezolvare a acestei ecuații se bazează pe observația ce se poate face la început că înălțimea coloanei de mercur este mult mai mică decît lungimea tubului; x fiind mic, rezultă că x^2 este și mai mic și deci poate fi neglijat, ecuația de gradul al doilea rămînînd de gradul I; se obține astfel soluția aproximativă

$$x \approx \frac{p_0 + \rho g(h-l)}{p_0 + \rho g l} h$$

sau după înlocuirea lui p_0

$$x \approx \frac{H + h - l}{H + l} h = \frac{0,75 + 0,2 - 0,7}{0,75 + 0,7} \cdot 0,2 = 0,035 \text{ m.}$$

Eroarea ce se face față de valoarea corectă este

$$\varepsilon = \frac{0,05 - 0,035}{0,05} \cdot 100 = 30\%$$

valoare destul de mare, așa încît simplificarea calculului nu este justificată.

Înlocuind în ecuația (1) și în soluția aproximativă $x = 0$, pentru $l = l_1$ se obține

$$l_1 = H + h = 0,75 + 0,2 = 0,95 \text{ m.}$$

Răspunsul la cea de a doua întrebare a enunțului se obține determinînd din soluția de mai sus valoarea lui l atunci cînd $x = 0$; rezultă

$$l \geq \frac{p_0 + \rho g h}{g} = 95 \text{ cm.}$$

2.6.4.2. Limitarea domeniului de valabilitate al unei ecuații pe criterii fizice. Unele fenomene fizice se desfășoară astfel încît ecuațiile care le descriu nu pot fi folosite pe întreg domeniul de variație al mărimilor ce intră în alcătuirea acestor ecuații fără pericolul de a trage concluzii false din punct de vedere fizic; se

impun deci unele limitări ale domeniului de valabilitate al ecuațiilor respective.

Ca exemplu să considerăm ecuația mișcării uniform întârziată

$$x = -\frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

în care a și v_0 sînt două mărimi pozitive.

Dacă această ecuație este folosită pentru descrierea mișcării pe verticală a unui corp aruncat din originea O a axei, cu viteza v_0 orientată în sus (caz în care $a = g$), ecuația poate fi considerată ca valabilă pentru $t \geq 0$ sau — dacă ținem seama de ciocnirea cu Pămîntul, pentru $0 \leq t \leq 2 \frac{v_0}{g}$. În cazul în care nu ținem seama de aceasta și considerăm că pe verticală există un canal în care piatra poate coborî oricît sub nivelul unde ea a fost aruncată inițial, atunci ecuația este valabilă pe tot intervalul $[0, +\infty)$. Dacă această ecuație este folosită pentru descrierea mișcării cu frecare a unui corp pe un plan orizontal (caz în care $a = \mu g$), atunci ea este valabilă numai pentru $t \in \left[0, \frac{v_0}{\mu g}\right]$, ultima valoare reprezentînd momentul anulării vitezei mobilului. Este ușor de observat faptul că introducînd în ecuație valori ale timpului superioare lui $v_0/\mu g$ rezultă că abscisa x se micșorează, viteza mobilului devine negativă, deci corpul respectiv începe să se miște înapoi, fapt care contravine în mod flagrant realității (vezi și E 2.8).

2.6.4.3. Folosirea criteriilor fizic și matematic la descoperirea unor limitări impuse datelor problemei. Este binecunoscut faptul că datele unei probleme sînt în general independente între ele, dar că, totodată, structura rezultatelor precum și fenomenele care au loc în problema respectivă impun anumite restricții în ce privește domeniile în care ele pot varia. Ca exemplu să considerăm următoarea problemă.

E 2.11. Într-un jgheab avînd forma unui sfert de cerc, de rază R , situat în planul vertical, este lansată din punctul cel mai de jos, cu viteza v_0 , o bilă. Neglijînd

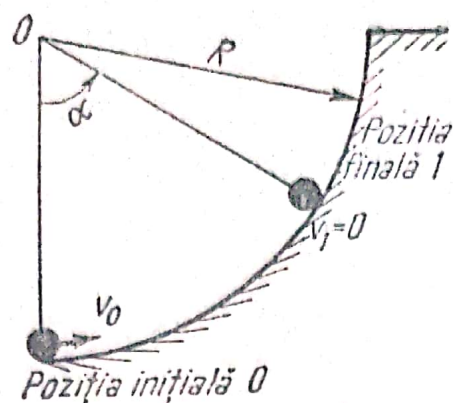


Fig. E 2.11

frecările se cere să se afle unghiul α maxim dintre raza ce unește centrul cercului cu bila și verticală (fig. E 2.11).

Rezolvare Observăm că în poziția în care α este maxim bila se oprește și revine ulterior către poziția inițială, deci în acest punct viteza sa se anulează.

Aplicînd metoda energiei între poziția inițială de lansare O și poziția finală 1 caracterizată de unghiul α maxim sub forma

$$\Delta E + \Delta \Pi = 0$$

obținem

$$\Delta E = E_1 - E_0 = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\Delta \Pi = mgh = mgR(1 - \cos \alpha).$$

Rezultă

$$\cos \alpha = 1 - \frac{v_0^2}{2gR}.$$

Structura rezultatului astfel obținut ne obligă la limitarea pe criteriul matematic

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

adică

$$-1 \leq 1 - \frac{v_0^2}{2gR} \leq 1. \quad (1)$$

Cercetînd ambele inegalităţi obţinem

$$-1 \leq 1 - \frac{v_0^2}{2gR} \Rightarrow v_0^2 \leq 4gR$$

$$1 - \frac{v_0^2}{2gR} \leq 1 \Rightarrow \frac{v_0^2}{2gR} \geq 0$$

ultima condiţie fiind îndeplinită de la sine, deoarece v_0 , g şi R sînt toate pozitive.

Condiţia (1) reprezintă însă o relaţie între datele problemei obţinută pe criteriul matematic.

Jgheabul în care se mişcă bila are forma unui sfert de cerc şi deci $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, pentru că, în caz contrar, bila iese afară din jgheab şi mişcarea se schimbă. În acest caz domeniul se restrînge mai mult:

$$0 \leq \cos \alpha \leq 1$$

adică

$$0 \leq 1 - \frac{v_0^2}{2gR} \leq 1$$

deci

$$0 \leq 1 - \frac{v_0^2}{2gR} \Rightarrow v_0^2 \leq 2gR$$

$$1 \geq 1 - \frac{v_0^2}{2gR} \Rightarrow \frac{v_0^2}{2gR} \geq 0$$

condiţie îndeplinită de la sine.

Iată deci că interpretarea rezultatului obţinut, atît pe criteriul matematic cît şi pe cel fizic, este absolut necesară în orice problemă de fizică în scopul excluderii acelor rezultate care nu corespund realităţii. Situaţiile menţionate mai sus trebuie considerate doar ca exemple, cîmpul de acţiune al acestui program fiind mult mai larg.

Un alt exemplu în care interpretarea este necesară pentru găsirea tuturor soluţiilor problemei este prezentat în cele ce urmează.

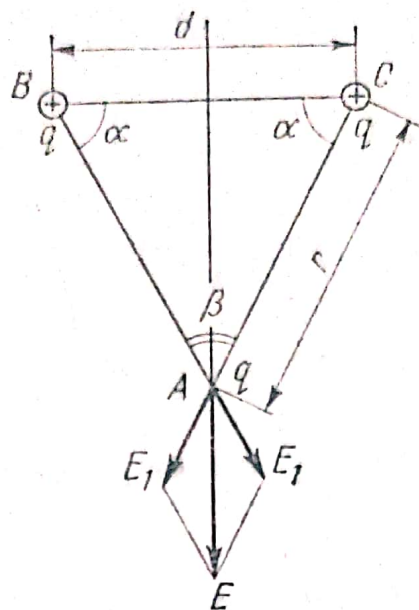


Fig. E 2.12

E 2.12. Două sarcini electrice punctiforme pozitive și de aceeași valoare Q sînt așezate în vîrfurile B și C ale unui triunghi isoscel ABC ($\hat{B} = \hat{C}$). Se cere să se calculeze valoarea unghiului A pentru care intensitatea cîmpului electrostatic creat de cele două sarcini în vîrfurile A are valoarea maximă. Latura BC a triunghiului se consideră de mărime egală cu d [15, 10/70].

Rezolvare. Datele problemei sînt: $\hat{B} = \hat{C}$; d ; Q . Rezultanta E a intensității cîmpului electrostatic creat de cele două sarcini, în punctul A are expresia

$$E = 2E_1 \cos \frac{\beta}{2}$$

unde

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}, \quad r = \frac{d}{2 \sin \frac{\beta}{2}},$$

Rezultă astfel

$$E = \frac{2Q}{\pi\epsilon d^2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} = k \sin^2 \beta \cos \frac{\beta}{2} \quad (1)$$

unde $k = \frac{2Q}{\pi\epsilon d^2}$ este o constantă.

Valorile extreme ale lui E se obțin egalind cu zero derivata acestuia în raport cu β

$$E' = k \left[2 \frac{1}{2} \sin \beta \cos^2 \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \right] = \\ = \frac{k}{2} \sin \frac{\beta}{2} \left[2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} \right].$$

Soluțiile ecuației $E' = 0$ sînt

$$\sin \frac{\beta}{2} = 0 \Rightarrow \beta_1 = 0$$

și

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} = 2, \text{ de unde } \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \pm \sqrt{2}; \text{ soluția}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = +\sqrt{2} \Rightarrow \beta_2 = 109^\circ 20'$$

iar

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = -\sqrt{2} \Rightarrow \beta_3 = 250^\circ 40'.$$

Interpretarea rezultatelor. Pentru soluția $\beta_1 = 0^\circ$, se obține valoarea minimă a intensității rezultante, respectiv $E = 0$, acest lucru semnificînd din punct de vedere fizic faptul că punctul A se găsește la infinit pe perpendiculara BC .

Dintre celelalte soluții numai β_2 este valabilă, β_3 avînd o valoare peste 180° și deci inacceptabilă din punct de vedere geometric.

Pentru a vedea dacă β_2 corespunde unui maxim al intensității cîmpului se face derivata a doua a lui E în raport cu β , respectiv

$$E'' = \frac{k}{2} \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\beta}{2} \left(2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} \right) - \right. \\ \left. - \left(2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right) \sin \frac{\beta}{2} \right]$$

a cărei valoare pentru β_2 este

$$E'' = -\frac{3}{2} k \sin^2 \frac{\beta_2}{2} \cos \frac{\beta_2}{2} = -\frac{3}{2} k \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{k}{\sqrt{3}} < 0.$$

Deoarece pentru $\beta = \beta_2$ derivata a doua a lui E respectiv E'' este negativă, aceasta înseamnă că pentru această valoare E este maxim.

Verificând semnul derivatei a doua a lui E pentru valoarea $\beta = \beta_1$ se obține

$$E'' = \frac{k}{4} \cos \frac{\beta_1}{2} \left(2 \cos^2 \frac{\beta_1}{2} - \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \right) = \frac{k}{2} > 0$$

confirmându-se astfel faptul că pentru această valoare a unghiului intensitatea cîmpului electrostatic este minimă.

2.6.5. Programul de verificare. Ca urmare a rezolvării unei anumite probleme de fizică se obțin două categorii de rezultate pentru mărimile cerute în problema respectivă;

- rezultate literale,
- rezultate numerice,

ultimele fiind deduse din primele prin înlocuirea valorilor literale cu cele numerice date în problemă.

Este de la sine înțeles că cel ce rezolvă o anumită problemă de fizică trebuie să dispună de posibilitatea verificării rezultatelor obținute, care să-i ofere anumite certitudini asupra faptului că legile fizicii au fost corect aplicate, că relațiile folosite au fost mînuite corect din punct de vedere al operațiilor matematice efectuate și că interpretarea rezultatelor a fost bine făcută.

Vom prezenta în cele ce urmează cîteva din criteriile folosite în mod curent la verificarea rezultatelor obținute în rezolvarea unei anumite probleme.

2.6.5.1. Pentru rezultatele literale.

1) *Criteriul omogenității.* Acest criteriu universal valabil pentru orice relație ce conține mărimi de orice natură cere ca dimensiunile tuturor termenilor care se adună sau se scad, respectiv care se află de o parte și de alta a semnului egal, să fie aceleași. Astfel, în egalitatea

$$A = B$$

trebuie ca dimensiunile termenilor A și B să fie aceleași fapt care se scrie astfel

$$[A] = [B].$$

De asemenea, în egalitatea

$$A = B + C$$

trebuie să avem

$$[A] = [B] + [C].$$

Spre exemplu, în relația presiunii menționată mai sus trebuie să avem

$$[p] = [p_0] + [\rho gh].$$

Într-adevăr, folosind unitățile de măsură din SI avem

$$[p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$[p_0] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$[\rho gh] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Acest criteriu oferă rezolvitorului o condiție *necesară*, dar *nu și suficientă*, de verificare a exactității rezultatelor obținute. Ținând seama, însă, de faptul că există șanse foarte mici ca un rezultat să fie întîmplat exact din punct de vedere dimensional, dar greșit din punct de vedere al calculului, el constituie un criteriu de verificare foarte eficient.

2) *Criteriul sensului de variație*. Din examinarea calitativă a corelației ce există între diferite mărimi fizice dintr-o problemă se pot trage concluzii utile în ceea ce privește sensul de variație (creștere sau descreștere) a unora în raport cu altele.

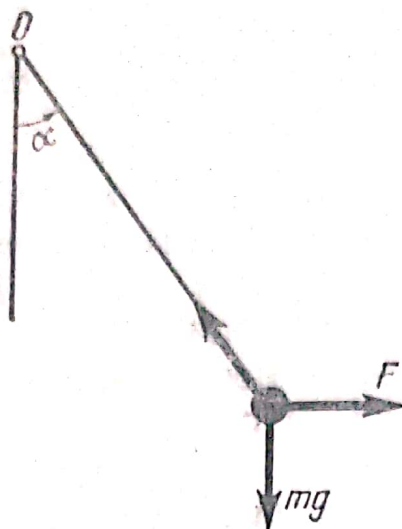


Fig. E 2.13

E 2.13. Se cere determinarea unghiului α pe care îl face la echilibru cu verticala un pendul de masă m acționat de o forță orizontală F (fig. E 2.13).

Rezolvare. Se găsește următorul rezultat

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{mg}.$$

Dacă presupunem că m este constant (g , de asemenea) și mărim forța F , adică considerăm că pendulul este acționat de o forță $F_1 > F$, ne putem da ușor seama că pendulul se deplasează față de verticală (α crește), fapt care este confirmat de formula

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{F_1}{mg}$$

de unde rezultă

$$\operatorname{tg} \alpha_1 > \operatorname{tg} \alpha, \text{ deci } \alpha_1 > \alpha$$

deoarece tangentele unghiurilor variază în același sens cu unghiurile.

De asemenea, dacă păstrăm constantă forța F , dar considerăm că pendulul are o masă $m' > m$, el se apropie de verticală (unghiul scade), fapt de asemenea confirmat de formulă

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{F}{m'g} < \operatorname{tg} \alpha$$

de unde rezultă

$$\operatorname{tg} \alpha' < \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \alpha' < \alpha$$

pentru același motiv ca mai sus.

Această verificare ne dă o anumită siguranță în ceea ce privește exactitatea rezultatului obținut.

3) *Criteriul imposibilității fizice.* Din examinarea structurii finale a rezultatului literal obținut pe baza acestui criteriu se poate decide imediat dacă el conține o serie de imperfecțiuni care conduc la situații fizice imposibile. Astfel, dacă în exemplul E 3.15 am fi obținut pentru accelerația sistemului, alcătuit din cele două mase, valoarea

$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 - m_2} g,$$

acest rezultat este sigur greșit, deoarece pentru $m_1 = m_2$ rezultă $a \rightarrow \infty$, ceea ce este fizic imposibil.

În asemenea situații refacem calculul, spre a descoperi greșeala din rezolvarea respectivă.

Aceleași afirmații rămân valabile și în cazul în care, spre exemplu, o mărime fizică pozitiv definită rezultă din calcule ca fiind negativă. Neputându-se atribui nici un sens fizic semnului negativ obținut, tragem concluzia că rezultatul este greșit. Uneori această concluzie se poate trage chiar din punct de vedere matematic (spre exemplu pătratul unei mărimi oarecare rezultă negativ, deci mărimea respectivă are valori imaginare, fapt lipsit de cele mai multe ori de sens).

Același lucru se poate spune și în cazul cosinusului sau sinusului unui unghi care rezultă supraunitar.

4) *Criteriul prezenței sau absenței anumitor mărimi.* Faptul că în rezultatul final dintr-o problemă sînt prezente sau nu, anumite mărimi aflate sub formă de date sau necunoscute în enunțul său constituie de asemenea indicii cu privire la exactitatea sau inexactitatea rezultatului obținut.

2.6.5.2. Pentru rezultatele numerice.

1) *Criteriul ordinului de mărime.* Este de observat faptul că datele numerice dintr-o problemă sînt astfel

alese încât ele să se afle între limitele valorilor extreme ale mărimii respective. Ca urmare a acestui fapt ordinul de mărime al rezultatului final trebuie să se afle și el în limitele valorilor extreme ale mărimii la care se referă.

Astfel, de exemplu, dacă într-o problemă valoarea vitezei unui automobil rezultă de 1500 km/oră, acest fapt trebuie să ne dea de gândit, deoarece asemenea viteze nu se întâlnesc încă la automobile.

În asemenea situații o verificare atentă a calculului în vederea descoperirii greșelii se impune de asemenea.

2.6.5.3. Pentru rezultatele literale și cele numerice

1) *Criteriul folosirii altor căi de rezolvare a problemei.*
De multe ori la rezolvarea unei probleme pot fi folosite mai multe căi, unele privind rezolvarea integrală, altele numai anumite părți ale acesteia. Unele dintre aceste căi pun mai ușor în evidență fenomenul fizic, dar pot prezenta un grad mai mare de dificultate la rezolvarea matematică: altele pot folosi situații echivalente din punct de vedere fizic, mai greu de observat pentru un nerutinat, dar care pot prezenta facilități matematice.

În cadrul aceleiași căi de rezolvare a unei probleme, pentru a se ajunge la rezultatele cerute se pot folosi diverse moduri de rezolvare matematică a relațiilor stabilite: în toate cazurile rezultatele trebuie să coincidă.

E.2.14. O sferă de masă m , încărcată cu sarcina electrică q , este suspendată de extremitatea unui fir subțire și izolat. Celălalt capăt al firului este fixat în punctul cel mai de sus al unui inel circular de rază R . Inelul este format dintr-un fir metalic rigid, de secțiune neglijabilă, situat într-un plan vertical. Pe inel este repartizată uniform o sarcină electrică Q de același semn cu q . Se cere să se determine lungimea l a firului, pentru care poziția finală de echilibru a sferei după îndepărtarea ei se va găsi pe axa inelului perpendiculară pe planul acestuia.

Se cere soluția generală a problemei și soluția pentru următoarele valori numerice

$$Q = q = 9 \cdot 10^{-8} \text{ C}; \quad R = 5 \text{ cm}; \quad m = 1 \text{ g}; \\ \epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}.$$

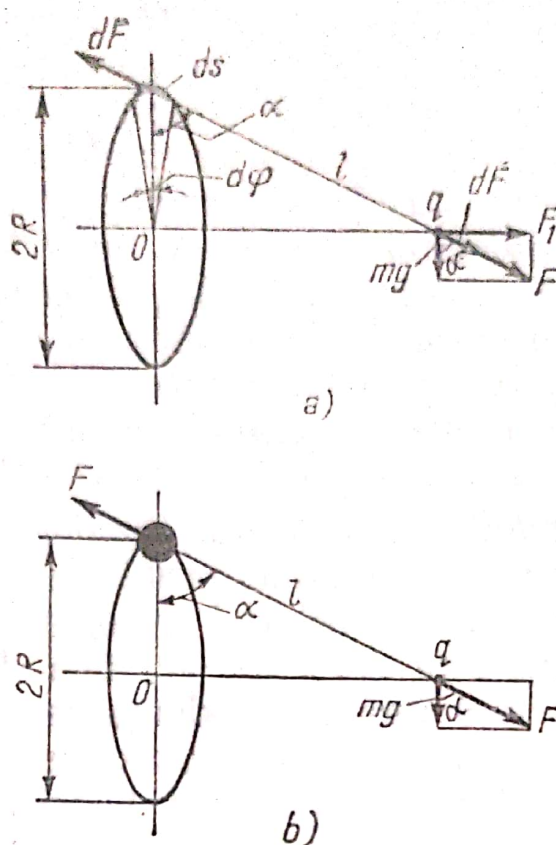


Fig. E 2.14

Se va neglija masa firului. (Concurs internațional BRNO, 1969).

Rezolvare. Soluția I. Datele problemei sînt: Q, R, m, ϵ_0 .

Se consideră un element de arc de cerc aparținînd inelului, de lungime elementară $ds = R d\varphi$, încărcat cu sarcina elementară (fig. E.2.14, a)

$$dQ = \frac{Q}{2\pi R} R d\varphi = \frac{Q}{2\pi} d\varphi.$$

Forța de respingere elementară dF dintre această sarcină și cea a sferei este

$$dF = \frac{q \frac{Q}{2\pi}}{4\pi\epsilon l^2} = \frac{Qq}{8\pi^2\epsilon l^2} d\varphi.$$

Rezultanta tuturor acestor forțe elementare, ținînd seama de simetria sistemului, este situată pe

direcția axei de simetrie a sistemului și are valoarea

$$F_1 = \int_0^{2\pi} dF \sin \alpha = \frac{Qq}{4\pi\epsilon l^2} \sin \alpha$$

unde α este unghiul pe care îl face planul inelului cu firul de care este suspendată sfera.

În poziția de echilibru rezultanta acestei forțe și cea a greutății sferei are direcția firului, ceea ce permite scrierea următoarei relații

$$mg \operatorname{tg} \alpha = F_1$$

de unde

$$mg \operatorname{tg} \alpha = \frac{Qq}{4\pi\epsilon l^2} \sin \alpha$$

respectiv

$$mg = \frac{Qq}{4\pi\epsilon l^2} \cos \alpha.$$

Deoarece

$$\cos \alpha = \frac{R}{l} \text{ rezultă } mg = \frac{QqR}{4\pi\epsilon l^3}$$

de unde

$$l = \sqrt[3]{\frac{QqR}{4\pi\epsilon mg}}. \quad (1)$$

Soluția a II-a. Rezolvarea poate fi mult simplificată dacă se observă că situația prezentată în problemă este echivalentă cu cea în care sarcina electrică Q a inelului poate fi considerată concentrată într-un singur punct al acestuia (fig. E.2.14, b). În acest caz forța coulombiană F are aceeași valoare ca mai înainte, adică

$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon l^2}.$$

Deoarece $mg = F \cos \alpha$, unde $\cos \alpha = \frac{R}{l}$, rezultă

$$mg = \frac{Qq}{4\pi\epsilon l^2} \frac{R}{l}, \text{ de unde}$$

$$l = \sqrt[3]{\frac{QqR}{4\pi\epsilon mg}} \quad (2)$$

soluție identică cu cea găsită (1). Pentru valorile numerice date rezultă

$$l = \sqrt[3]{\frac{(9 \times 10^{-8})^2 \times 5 \times 10^{-2}}{4\pi \times 8,9 \times 10^{-12} \times 10^{-3} \times 9,8}} = 0,0718 \text{ m.}$$

E 2.13 (reluare). Soluțiile obținute mai pot fi deduse și pe altă cale scriind astfel expresia lui (1) E 2.12 și anume

$$E = k \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} = \frac{k}{2} \sin \beta \sin \frac{\beta}{2}.$$

Derivând această expresie se obține

$$\begin{aligned} E'_\beta &= \frac{k}{2} \left(\cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \beta \right) = \\ &= \frac{k}{2} \sin \frac{\beta}{2} \left(\cos \beta + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} \right). \end{aligned}$$

Soluțiile ecuației $E' = 0$ se obțin din

$$\sin \frac{\beta}{2} = 0, \cos \beta + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} = 0$$

care conduc la valori ale unghiurilor β identice cu cele găsite mai înainte, verificându-se astfel că soluțiile găsite anterior sînt corecte.

2.7. Redactarea și prezentarea unei probleme. Redactarea unei probleme reprezintă formularea conținutului rezolvării acesteia, iar prezentarea, modul în care această formulare este comunicată celui care o urmărește. Redactarea și prezentarea oglindesc modul de înțelegere, capacitatea de gîndire a celui ce rezolvă problema, spiritul său de organizare și chiar personalitatea acestuia.

Redactarea unei rezolvări este deosebit de importantă deoarece, în orice împrejurare, fie că este vorba de rezolvarea unei probleme pusă de practică, fie de o problemă de examen sau concurs, ea trebuie să fie verificată de o comisie pentru a fi notată în mod corespunzător. O bună redactare demonstrează o gîndire

organizată, o corectă înțelegere a fenomenelor, o bună stăpânire a relațiilor și a mînuirii calculului numeric.

Redactarea unei probleme trebuie să fie, ca și enunțul acesteia, clară, concisă, completă și exactă. În plus, ea trebuie să se desfășoare în ordine logică, să folosească cele mai scurte căi pentru a ajunge la rezultate, să fie rezolvată cu un aparat matematic adecvat.

O rezolvare bine făcută, dar redactată greoi, confuz, cu mult text, scrisă neîngrijit, cu multe ștersături, cu calcule greoaie etc., scade foarte mult din valoarea lucrării. Marea majoritate a lucrărilor scrise păcătuiesc din aceste puncte de vedere și mai cu seamă ca prezentare, capitol neglijat, deoarece în general nu se apreciază decît rezolvarea în sine.

Pregătirea unui elev sau student în cadrul învățămîntului, pentru viitoarea lui carieră, unde trebuie să rezolve probleme cu mult mai complexe decît cele puse în timpul școlii, trebuie să aibă în vedere și aceste aspecte.

În cele ce urmează se dau cîteva indicații în legătură cu modul în care trebuie redactată rezolvarea unei probleme.

În general, redactarea rezolvării unei probleme se începe cu prezentarea informațiilor directe furnizate în enunț. Cu ajutorul lor se alcătuiește o schemă a elementelor care intră în compunerea acesteia și se identifică mărimile din schemă care sînt sau nu sînt cunoscute.

În continuare se transpun în relații atît informațiile din enunț, cît și cele ce rezultă din schemă.

Se obține astfel un sistem de ecuații în care sînt cuprinse atît datele cît și necunoscutele problemei.

Rezolvarea acestui sistem duce la determinarea necunoscutelor. Acolo unde, și cînd este cazul, se inserează la finele redactării concluzii legate de alcătuirea schemei, se comentează performanțele ce se obțin, se fac propuneri pentru îmbunătățirea acestora, se indică posibilitățile lor de realizare etc.

În general se caută ca rezolvarea unei probleme să se facă într-un caz cît mai general, simbolizîndu-se mărimile ce se folosesc la rezolvarea acesteia prin litere.

Dacă se poate, problema se rezolvă literal în întregime, introducându-se datele numerice numai în formulele finale. În cazul în care pe parcursul rezolvării unei probleme relațiile scrise literal sînt lungi și greu de manevrat, la etapa la care ele încep să se complice, se introduc datele numerice.

La redactarea unei probleme se prezintă de regulă numai una din căile de rezolvare, chiar dacă pentru aceasta s-au folosit mai multe căi în vederea verificării rezultatelor. De obicei se alege acea cale care este cea mai scurtă, mai precisă și mai ușor de înțeles de către cei cărora le este adresată.

Textul care însoțește redactarea trebuie să fie scurt, concis, să conțină tot ce este necesar și să exprime trecerea de la o fază la alta a rezolvării.

Acest text trebuie să fie scris îngrijit, fără ștersături. Rezultatele se vor sublinia (dacă acest lucru este permis), dar în orice caz vor fi prezentate pe pagină de aceeași parte a paginii (pe stînga, la mijloc sau la dreapta), de obicei la dreapta paginii.

Relațiile importante de calcul vor fi numerotate pentru ca referirile la ele să fie cît mai rapide. Nu se va încărca textul numerotînd fiecare relație ci numai cele esențiale.

Desenele, de asemenea, trebuie executate îngrijit, cu instrumentele necesare, respectînd tehnicile învățate de desen liniar sau tehnic.

O lucrare este bine făcută atunci cînd are și redactarea și forma de prezentare corespunzătoare.

Cele cîteva indicații de mai sus răspund acestui desiderat, ajutînd pe cei ce au de rezolvat o problemă să întocmească totodată și o bună redactare și prezentare.

În cuprinsul acestei cărți sînt prezentate o serie de probleme însoțite de rezolvările necesare și redactarea corespunzătoare, din care să se desprindă părțile componente ale enunțului, modul de punere în ecuații al diverselor informații și rezolvarea acestor ecuații.

Trebuie reținut faptul că unele rezolvări din această lucrare au fost prezentate ceva mai detaliat cînd s-a considerat necesar, aceasta însă din dorința îmbogățirii cunoștințelor celor care le urmăresc, precum și

a sesizării mai ușoare a schemei logice adoptată pentru rezolvare. În alte ocazii, dimpotrivă, rezolvările au fost prezentate succint, textul nefiind considerat necesar.

Exemplele prezentate în continuare ilustrează ideile prezentate mai sus.

E 2.15. La bornele unei baterii galvanice de tensiune electromotoare $E = 12 \text{ V}$ și rezistență interioară $r = 0,5 \Omega$ sînt conectate în paralel două rezistențe R_1 și R_2 . Căldura dezvoltată într-o oră și jumătate în cele două rezistențe este $Q = 62,1 \text{ kJ}$.

Se cere să se calculeze:

a) Rezistența echivalentă a celor două rezistențe conectate în paralel.

b) Intensitatea curentului debitat de baterie.

c) Valorile rezistențelor R_1 și R_2 astfel încît după deconectarea rezistenței R_1 curentul prin circuit să scadă la jumătate.

(IPB, ingineri, iulie, 1969)

Rezolvare. a), b). Informații directe din enunț:

Date numerice: $E = 12 \text{ V}$; $r = 0,5 \Omega$; $t = 1,5 \times 60 \times 60 = 5400 \text{ s}$; $Q = 62100 \text{ J}$.

Informații ce pot fi transpuse în relații:

— din schemă (fig. E.2.15, a)

$$(R + r)I = E \quad (1)$$

unde

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2};$$

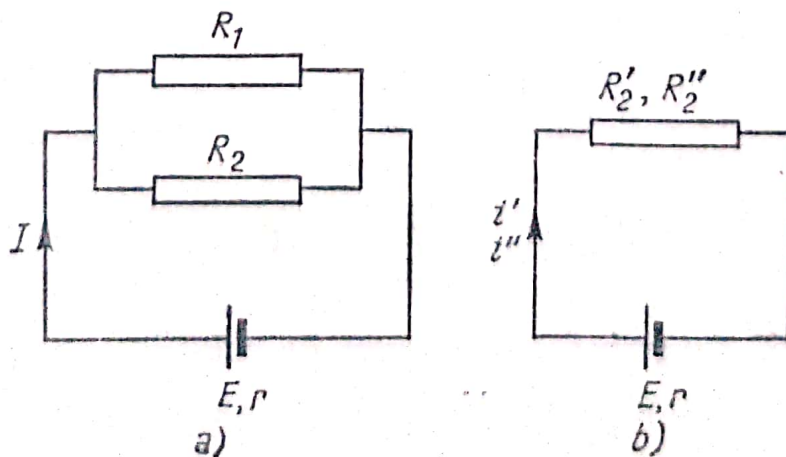


Fig. E 2.15

— din enunț

$$RI^2t = Q. \quad (2)$$

Necunoscutele din aceste două relații sînt R și I . Rezolvarea sistemului se face în modul următor. Din (2) rezultă

$$R = \frac{Q}{I^2t} \quad (3)$$

care, introdus în (1), conduce la ecuația

$$I^2 - \frac{E}{r} I + \frac{Q}{rt} = 0.$$

Înlocuind datele numerice ale problemei se obține ecuația

$$I^2 - 24 I + 23 = 0$$

ale cărei soluții sînt

$$I' = 1 \text{ A}, \quad I'' = 23 \text{ A}.$$

Pentru I' și I'' rezultă din (3)

$$R' = \frac{Q}{I'^2t} = \frac{62\,100}{1 \times 5400} = 11,5 \, \Omega$$

$$R'' = \frac{Q}{I''^2t} = \frac{62\,100}{23^2 \times 5400} = \frac{1}{46} \, \Omega.$$

c) Informații directe din enunț:

Date numerice:

$$i' = \frac{I'}{2} = 0,5 \text{ A}$$

$$i'' = \frac{I''}{2} = \frac{23}{2} = 11,5 \text{ A}.$$

Informații ce pot fi transpuse în relații:

— din schemă (fig. E 2.15, b)

$$(R'_2 + r)i' = E;$$

— necunoscute: R'_2 ; rezultă

$$R'_2 = \frac{E}{i'} - r = \frac{12}{0,5} - 0,5 = 23,5 \Omega.$$

Pentru obținerea rezistenței echivalente R' este necesar ca în paralel cu R'_2 să se introducă o rezistență

$$R'_1 = \frac{R'R'_2}{R'_2 - R'} = \frac{11,5 \times 23,5}{23,5 - 11,5} = 22,52 \Omega.$$

Refăcând raționamentul cu intensitatea i'' și rezistența R''_2 se obține

$$R''_1 = \frac{R''R''_2}{R''_2 - R''} = \frac{\frac{1}{46} \times 0,54}{-\frac{1}{46} + 0,54} = 0,22 \Omega.$$

E 2.16. O bobină cu miez de fier este confecționată dintr-un fir de cupru bobinat spiră lângă spiră într-un singur strat. Ea se conectează pe rînd la o tensiune continuă și alternativă de 110 V și frecvență 50 Hz.

Se cere să se calculeze:

a) Intensitatea I_1 care străbate bobina în curent continuu.

b) Intensitatea I_2 care străbate bobina în curent alternativ.

c) Valoarea capacității condensatorului ce trebuie legat în serie cu bobina în curent alternativ, pentru ca prin circuit să treacă un curent egal cu cel ce străbate bobina în curent continuu la aceeași tensiune.

Se dau: numărul de spire $N = 500$, lungimea bobinei $l = 10$ cm, diametrul bobinei $d = 2$ cm, permeabilitatea magnetică relativă a fierului $\mu_r = 800$, rezistivitatea cuprului $\rho = 0,0172 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ [16].

Rezolvare: a) Informații directe din enunț:

Date numerice: $N = 500$; $l = 10$ cm; $d = 2$ cm; $\mu_r = 800$; $\rho = 0,0172 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$; $U = 110$ V; $\nu = 50$ Hz.

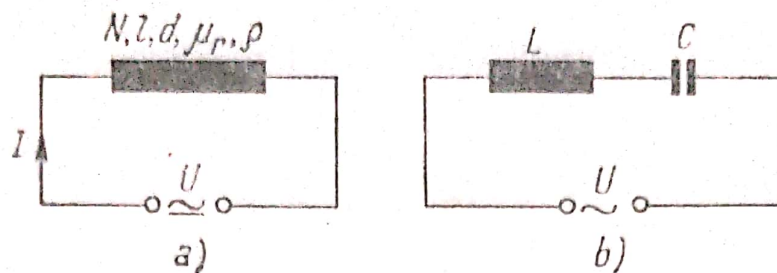


Fig. E 2.16

Informații din schemă ce pot fi transpuse în relații (fig. E 2.16, a):

$$R = \frac{\rho N \pi d}{\frac{\pi}{4} \left(\frac{l}{N} \right)^2} = \frac{0,0172 \times 10^{-6} \times 500 \times \pi \times 2 \times 10^{-2}}{\frac{\pi}{4} \left(\frac{10 \times 10^{-2}}{500} \right)^2} = 17,2 \, \Omega.$$

Din legea lui Ohm rezultă

$$I_1 = \frac{U}{R} = \frac{110}{17,2} = 6,4 \, \text{A}.$$

b) Informații din schemă ce pot fi transpuse în relații (fig. E 2.16, a):

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{l} = \frac{4 \times \pi \times 10^{-7} \times 800 \times 500^2 \times \frac{\pi \times 4 \times 10^{-4}}{4}}{10^{-1}} = \frac{8\pi^2}{10^2} \, \text{H}$$

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} = \frac{110}{\sqrt{17,2^2 + \left(\frac{8\pi^2}{10^2} 2\pi \times 50 \right)^2}} = 0,44 \, \text{A}.$$

c) Informații din enunț:

Date

$$U = 110 \, \text{V}; \quad L = \frac{8\pi^2}{10^2} \, \text{H}.$$

Condiția de rezonanță pentru schema din figura E 2.16, b este

$$L\omega = \frac{1}{C\omega}$$

de unde

$$C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{\frac{8\pi^2}{10^2} \pi^2 \times 10^4} = \frac{1}{800 \times \pi^4} = 12,9 \cdot 10^{-6} \, \text{F}.$$

E 2.17. Un dinam cu magneti permanenți are tensiunea electromotoare $E_1 = 100 \text{ V}$, cînd se rotește cu $n_1 = 500 \text{ rot/min}$.

Se pune dinamul în legătură cu o baterie de acumulatori ce urmează să fie încărcată și care are o tensiune electromotoare $E' = 60 \text{ V}$; dinamul furnizează în acest caz o putere $P = 800 \text{ W}$. Rezistența întregului circuit fiind $R = 2 \Omega$, se cere:

- turația dinamului;
- intensitatea curentului în circuit;
- puterea consumată sub formă de căldură în rezistența R [11].

Rezolvare. a) Informații directe din enunț:

Date numerice: $E_1 = 100 \text{ V}$; $n_1 = 500 \text{ ro t/min}$; $E' = 60 \text{ V}$; $P = 800 \text{ W}$; $R = 2 \Omega$.

Informațiile din enunț ce pot fi transpuse în relații:

— Prima frază a enunțului se traduce prin relația

$$E_1 = kn_1 \quad (1)$$

unde k este o constantă ce depinde de caracteristicile constructive ale mașinii, de numărul de spire al rotorului și de flux, care rămîn constante independent de turația mașinii.

Informații ce rezultă din schemă (fig. E. 2.17) și din funcționarea mașinii în această schemă:

$$E = kn \quad (2)$$

$$E = E' + RI \quad (3)$$

$$P = EI \quad (4)$$

$$P' = RI^2. \quad (5)$$

Necunoscutele din aceste relații sînt: n , I , E , k , P' .

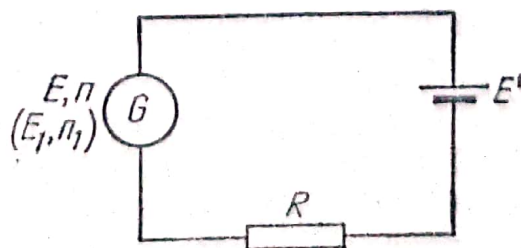


Fig. E 2.17

Necunoscutele cerute în problemă sînt: n , I , P' .
Rezolvarea sistemului se face în modul următor.
Din (3) rezultă

$$I = \frac{E - E'}{R} \quad (6)$$

care, introdus în (4) conduce la ecuația

$$E^2 - EE' - PR = 0$$

sau, introducînd datele numerice,

$$E^2 - 60E - 1\,600 = 0$$

de unde rezultă

$$E_1 = 80 \text{ V}, \quad E_2 = -20 \text{ V}.$$

Soluția E_2 se exclude, deoarece nu are sens fizic.
Introducînd E_1 în (6) rezultă

$$b) \quad I = \frac{80 - 60}{2} = 10 \text{ A}.$$

Din (1) și (2) rezultă

$$a) \quad n = \frac{E}{E_1} n_1 = \frac{80}{100} 500 = 400 \text{ rot/min}$$

Cu valoarea lui I găsită rezultă

$$c) \quad P' = RI^2 = 2 \times 10^2 = 200 \text{ W}$$

răspunzîndu-se astfel la toate întrebările din enunț.
E 2.18. Un circuit electric, alimentat de o tensiune alternativă, cuprinde o bobină M cu miez magnetic, un condensator plan P și un rezistor K legate în serie (fig. E 2.18, a). Bobina are o lungime $l = 30 \text{ cm}$ și este constituită din $N = 1\,000$ spire cu raza $r = 2 \text{ cm}$. Rezistorul are rezistența activă $R = 10 \, \Omega$. Pentru o frecvență $f_1 = 35 \text{ kHz}$ a generatorului care alimentează circuitul și o distanță d_1 dintre armăturile condensatorului, tensiunea efectivă la bornele rezistorului K atinge o valoare maximă egală cu $U_1 = 0,6 \text{ V}$. Pentru aceeași distanță d_1 , dar pentru o frecvență $f_2 = 50 \text{ kHz}$,

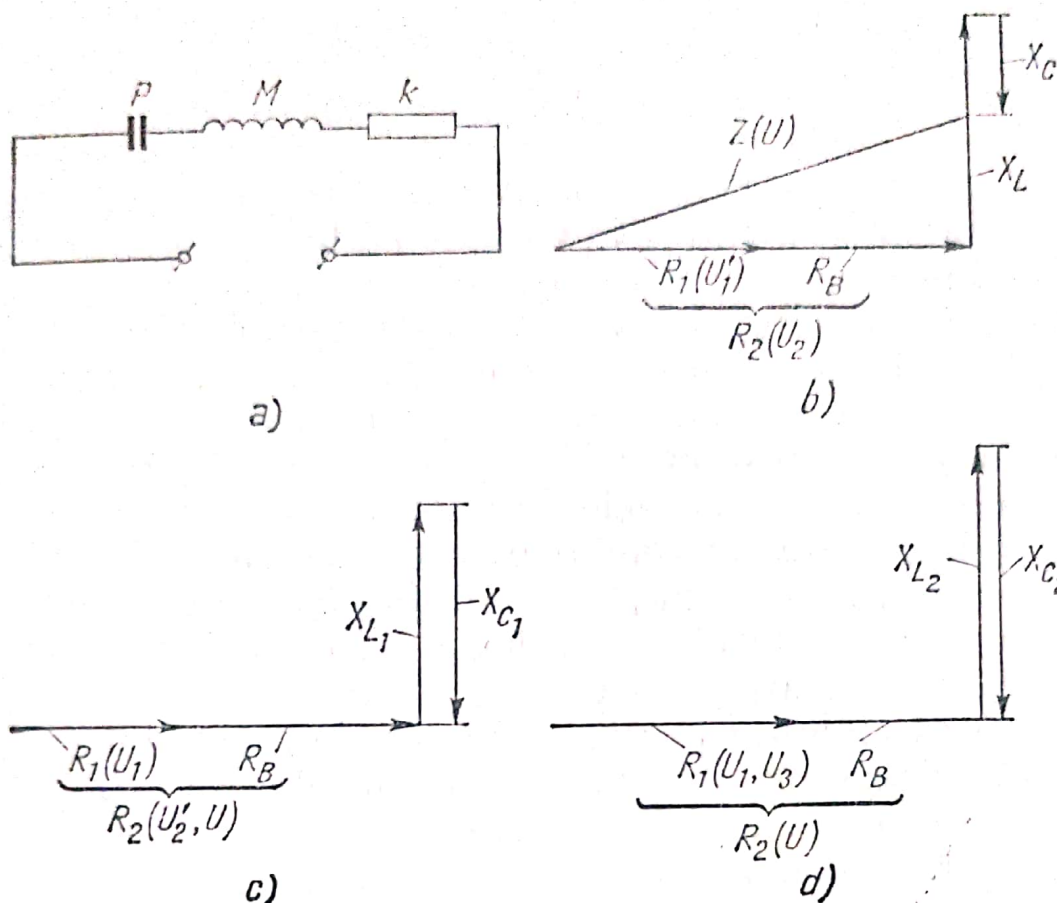


Fig. E 2.18

tensiunea efectivă la bornele rezistorului scade la $U'_1 = 0,002$ V. Dacă în cazul frecvenței f_2 distanța dintre armăturile condensatorului se mărește cu $d = 1,8$ mm, tensiunea efectivă la bornele rezistorului devine din nou maximă, avînd valoarea $U_3 = U_1 = 0,6$ V. Dielectricul dintre armăturile condensatorului este aerul.

Să se determine:

a) Valorile C_1 și C_2 ale capacității condensatorului în cele două poziții ale armăturilor, aria suprafeței fiecărei armături fiind $A = 400$ cm², iar permitivitatea aerului, fiind

$$\epsilon = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \times 10^9} \text{ F/m.}$$

b) Distanța d_1 dintre armăturile condensatorului.

c) Inductanța L a bobinei M .

d) Rezistența echivalentă R_2 a întregului circuit (inclusiv rezistența activă a bobinei).

e) Permeabilitatea relativă μ_r a miezului magnetic

al bobinei cunoscându-se permeabilitatea vidului $\mu_0 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$.

[I.P.B., ingineri, sept., 1971]

Rezolvare. Pentru circuitul din enunț diagrama rezistențelor se prezintă ca în fig. (E 2.18, b). Pe această diagramă figurează rezistența activă R_1 a rezistorului K și rezistența R_B a bobinei. De asemenea, pe figură s-a notat cu R_2 suma acestor două rezistențe. În paranteză pe aceeași figură sînt scrise tensiunile la bornele rezistorului K respectiv U'_1 , la bornele rezistenței R_2 respectiv U_2 și la bornele circuitului (U).

Din informația din enunț care precizează că, pentru frecvența f_1 a generatorului și o distanță d_1 dintre armăturile condensatorului, tensiunea efectivă la bornele rezistorului K atinge o valoare maximă egală cu U_1 ; rezultă că circuitul pentru frecvența dată este în rezonanță. Diagrama fazorială a circuitului în această situație este cea din fig. E 2.18, c.

În aceste condiții se pot scrie relațiile

$$L\omega_1 = \frac{1}{C_1\omega_1} \quad (1)$$

$$U = U_2 = R_2 I_1 \quad (2)$$

$$U_1 = R_1 I_1 = R_1 \frac{U}{R_2} \quad (3)$$

unde I_1 este intensitatea curentului din circuit pentru această situație.

Cea de a doua informație din enunț, care precizează că pentru o frecvență f_2 tensiunea efectivă la bornele rezistorului scade la U'_1 , se traduce prin diagrama fazorială din figura E 2.18, b și relațiile

$$U = I_2 \sqrt{R_2^2 + \left(L\omega_2 - \frac{1}{C_1\omega_2}\right)^2} \quad (4)$$

$$I_2 = \frac{U'_1}{R_1} \quad (5)$$

Cea de a treia serie de informații, care precizează că frecvența curentului rămîne aceeași f_2 , dar capacitatea

condensatorului se schimbă datorită variației distanței dintre armături care crește cu d devenind C_2 și că tensiunea la bornele rezistorului devine iarăși maximă (circuitul intră din nou în rezonanță) și are valoarea $U_3 = U_1$, se traduc prin diagrama rezistențelor din figura E 2.18, d și relațiile

$$L\omega_2 = \frac{1}{C_2\omega_2} \quad (6)$$

și respectiv (3).

De asemenea, se mai pot scrie expresiile ce dau capacitățile C_1 și C_2 , respectiv

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{d_1} \quad (7)$$

și

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{d_1 + \Delta d}. \quad (8)$$

Acestor opt relații scrise pe baza informațiilor din enunț li se mai poate adăuga relația

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{l} \quad (9)$$

unde S este secțiunea bobinei.

Aceste nouă relații conțin nouă necunoscute, respectiv C_1 , C_2 , A , d_1 , L , I_1 , I_2 , R_2 , μ_r , dintre care C_1 , C_2 , d_1 , L , R_2 și μ_r sînt cerute în problemă.

Rezolvarea acestui sistem de ecuații se face după cum urmează. Din relațiile (1), (6), (7) și (8) avem

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{d_1}{d_1 + \Delta d} = \frac{f_1^2}{f_2^2}$$

de unde

$$d_1 = \frac{f_1^2 \Delta d}{f_2^2 - f_1^2} = \frac{1,8 \times 35^2}{50^2 - 35^2} = 1,729 \text{ mm.}$$

Din (7) și (8) rezultă

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{d_1} = \frac{400 \times 10^{-4}}{4\pi \times 10^9 \times 1,729 \times 10^{-3}} = 204 \times 10^{-12} \text{ F}$$

$$C_2 = C_1 \frac{d_1}{d_2} = 204 \times 10^{-12} \times \frac{1,729}{1,729 + 1,8} = 100,25 \times 10^{-12} \text{ F}.$$

Din relația (6) rezultă

$$L = \frac{1}{C_2 \omega_2^2} = \frac{1}{100,25 \times 10^{-12} \times 4\pi^2 \times 25 \times 10^8} = 0,1012 \text{ H}.$$

Din (4) și (3) rezultă

$$R_2 = \frac{U_2}{\sqrt{U_1^2 - U_2^2}} \left(L \omega_2 - \frac{1}{C_1 \omega_2} \right) = \frac{2 \times 10^{-3}}{\sqrt{0,36 - 4 \times 10^{-6}}} \times \\ \times \left(0,1012 \times 2\pi \times 5 \times 10^4 - \frac{1}{204,6 \times 10^{-12} \times 2\pi \times 5 \times 10^4} \right) = 54,037 \text{ } \Omega.$$

Folosind datele problemei și necunoscutele calculate mai înainte se găsește

$$\mu_r = \frac{Ll}{\mu_0 N^2 S} = \frac{0,1012 \times 0,3}{4\pi \times 10^{-7} \times 10^{-6} \times \pi \times 4 \times 10^{-4}} = 19,24.$$

E 2.19. Un condensator plan cu aer avînd capacitatea de $C = 10 \text{ } \mu\text{F}$ se încarcă sub tensiunea $U = 20 \text{ kV}$.

O dată încărcat, condensatorul se deconectează de la sursa de tensiune și se introduce între armăturile lui o lamă de sticlă ($\epsilon_r = 5$), avînd o grosime egală cu jumătatea distanței d dintre armături (fig. E 2.19, a). Apoi se măsoară tensiunea U_1 la bornele condensatorului.

Se scoate lama dielectricului și o jumătate din condensator este umplută cu sticlă, astfel încît limita de separație dintre mediul aer-sticlă este perpendiculară pe plăcile condensatorului (fig. E 2.19, b). Tensiunea la bornele condensatorului este U_2 .

a) Să se calculeze valorile capacităților C_1 și C_2 ale condensatorului în cele două cazuri;

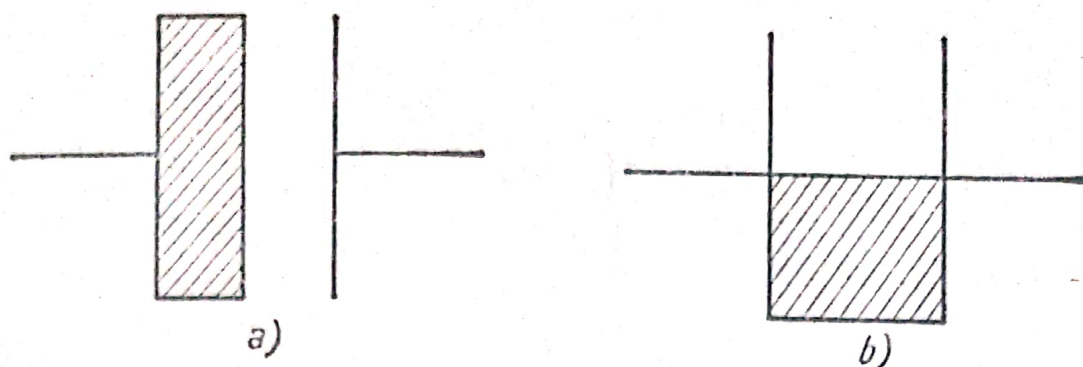


Fig. E 2.19

- b) Să se calculeze valorile tensiunilor U_1 și U_2 ;
 c) Să se arate că C_2 este întotdeauna mai mare decât C_1 [16].

Rezolvare. a), b) Informații directe din enunț:

Date numerice: $C = 10 \mu\text{F}$; $U = 20 \text{ kV}$; $\epsilon_r = 5$.

Informații din enunț ce pot fi transpuse în relații:

Din prima frază a enunțului se poate scrie că

$$Q = CU \quad (1)$$

Q fiind sarcina electrică cu care se încarcă condensatorul.

Din următorul paragraf al enunțului se pot scrie următoarele două relații

$$Q = C_1 U_1 \quad (2)$$

$$C_1 = \frac{2C}{1 + \frac{1}{\epsilon_r}} \quad (3)$$

C_1 fiind capacitatea condensatorului din fig. 2.18, a.

Cel de al treilea paragraf al problemei permite scrierea următoarelor relații

$$Q = C_2 U_2 \quad (4)$$

$$C_2 = \frac{C}{2} (1 + \epsilon_r) \quad (5)$$

C_2 fiind capacitatea condensatorului din fig. E 2.18, b,
 U_2 — tensiunea la bornele condensatorului C_2 .

Sistemul de ecuații (1)...(5) conține cinci necunoscute și anume: C_1 , C_2 , U_1 , U_2 și Q dintre care patru sînt cerute de problemă respectiv C_1 , C_2 , U_1 și U_2 .

Din (2) și (3) rezultă

$$Q = \frac{2C}{\left(1 + \frac{1}{\epsilon_r}\right)} U_1. \quad (6)$$

Din (4) și (5) rezultă

$$Q = \frac{C}{2} (1 + \epsilon_r) U_2. \quad (7)$$

Din (1) și (6) rezultă

$$U_1 = \frac{1 + \epsilon_r}{2\epsilon_r} U = \frac{1 + 5}{10} 20\,000 = 12\,000 \text{ V.}$$

Din (1) cu (7) rezultă

$$U_2 = \frac{2U}{1 + \epsilon_r} = \frac{2 \times 20\,000}{1 + 5} = 6\,666 \text{ V.}$$

Din (3) și (5) rezultă

$$C_1 = \frac{10 \times 10}{6} = 16,666 \text{ } \mu\text{F} \text{ și } C_2 = \frac{10 \times 6}{2} = 30 \text{ } \mu\text{F.}$$

c) Pentru rezolvarea acestui punct al problemei se scrie raportul

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\frac{C}{2} (1 + \epsilon_r)}{2C \frac{\epsilon_r}{1 + \epsilon_r}} = \frac{(1 + \epsilon_r)^2}{4\epsilon_r}.$$

Se vede că pentru $\epsilon_r \geq 1$ acest raport este totdeauna mai mare sau egal cu 1.

METODE GENERALE PENTRU REZOLVAREA PROBLEMELOR DE FIZICĂ

3.1. Generalități. După cum s-a arătat în capitolul I, instrumentul de rezolvare a oricărei probleme de fizică îl constituie aplicarea uneia sau mai multor formule (în cazuri simple) sau a uneia sau mai multor metode (în cazuri mai complicate).

Trebuie precizat faptul că cunoașterea, însușirea și aplicarea corectă a unei metode de calcul la rezolvarea unei probleme constituie o chestiune de experiență, care se dobândește pe baza rezolvării unui mare număr de probleme.

În capitolul de față se prezintă, în general, relații cunoscute din manualele de fizică din liceu, pe care însă am încercat să le dăm sub o asemenea formă, încât ele să poată fi cât mai ușor folosite de către cel care le mînuiește.

Rezolvări ale unor probleme care în aparență sînt diferite apar astfel, în lumina aplicării acestor metode, mult sistematizate, prin folosirea acestora putînd fi abordate atît cazuri simple cît și cazuri complexe.

Cunoașterea aprofundată a metodelor de rezolvare conduce la o rezolvare rapidă și sigură a problemelor indiferent de gradul lor de dificultate.

Spre o cît mai bună înțelegere, pentru fiecare metodă de rezolvare prezentată în acest capitol, s-au precizat:

- principiul metodei și domeniul de aplicabilitate,
- noțiuni de bază: definiții, notații, relații.
- ecuațiile metodei,

- programul metodei,
- indicații și precizări,
- exemple de aplicare a metodei.

Este de reținut faptul că în acest capitol nu sînt cuprinse toate metodele ce pot fi folosite în rezolvarea problemelor de fizică.

Metodele prezentate constituie numai exemple, pe baza cărora cititorul va putea să identifice singur și alte metode necuprinse în acest capitol.

3.2. Metoda ecuațiilor de mișcare

3.2.1. *Principiul metodei. Domeniul de aplicabilitate.* Metoda ecuațiilor de mișcare este una din metodele cinematicii; ea are la bază folosirea în calcule a coordonatei spațiale (coordonata carteziană din geometria analitică) și a coordonatei temporale (ora indicată de ceasornic) în locul spațiului (drumul parcurs) și timpului (interval de timp), folosite actualmente în rezolvarea foarte multor probleme de cinematică.

Uneori aceste noțiuni coincid, alteori nu, și această necoincidență provoacă mari greutăți și confuzii în rezolvarea anumitor probleme.

Aplicarea acestei metode la rezolvarea problemelor de cinematică este asociată cu folosirea unui „traductor” analitic al tuturor informațiilor cu privire la evenimentele fizice care au loc în problema respectivă, asemănător celui cu care, în geometria analitică, se traduc evenimentele geometrice în ecuații.

La această metodă, ecuațiile care servesc la rezolvarea problemelor sînt alcătuite cu ajutorul informațiilor din enunț „filtrate” prin ecuațiile de mișcare ale mobilelor din problema respectivă.

Cu ajutorul acestei metode se poate studia cinematica oricărei mișcări unidimensionale (caracterizată prin variația unui singur parametru). Ea este o metodă generală, nesupusă niciunei alte restricții, în afara celor ce vor fi menționate în continuare.

3.2.2. *Noțiuni de bază; definiții; notații; relații.* În ecuațiile acestei metode intervin următoarele noțiuni:

$x = x(t)$ — coordonata liniară (abscisa) a punctului mobil aflat în mișcare rectilinie pe o axă Ox , la un moment oarecare t , măsurată de la originea O a acestei axe. Valoarea acestei coordonate în momentul plecării mobilului se notează cu $x_0 = x(t_0)$, unde t_0 reprezintă ora plecării mobilului (eventual $t_0 = 0$, dar e posibil și $t_0 < 0$) din punctul de abscisă x_0 . În cursul rezolvării problemei mai pot apare și alte valori particulare ale coordonatei x , notate cu $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ ș.a.m.d. $t_1, t_2, \dots$ reprezentînd respectiv orele indicate de ceasornic (coordonatele temporale) cînd punctul mobil se află în punctele de abscisă $x_1, x_2, \dots$ pe axa Ox .

Atît coordonata $x(t)$ la un moment oarecare, cît și coordonatele oricăror poziții particulare $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, ... pot fi pozitive, negative sau nule, fapt care arată că mobilul se află pe partea pozitivă, pe cea negativă sau în originea O a axei de referință;

$\theta = \theta(t)$ — coordonata unghiulară a unui punct mobil aflat în mișcare circulară sau a unui solid aflat în mișcare de rotație la un moment dat t , măsurată de la o origine O pe o „axă” orientată într-un sens oarecare din cele două posibile (în sensul acelor de ceasornic sau opus). Cele afirmate mai sus despre coordonata liniară x rămîn valabile și pentru coordonata unghiulară schimbînd notația $x \rightarrow \theta$;

t — coordonata temporală sau ora indicată de ceasornic la un moment dat: valori particulare sînt $t = t_0$ (indicația ceasornicului în momentul plecării mobilului, eventual $t_0 = 0$, fiind posibil și $t_0 < 0$) $t = t_1$, $t = t_2$ ș.a.m.d.;

v — viteza liniară a punctului mobil aflat în mișcare rectilinie pe axa Ox ; ea este constantă în mișcarea rectilinie și uniformă ($v = \text{constant}$) sau funcție liniară de timp, crescătoare sau descrescătoare în cazul mișcării uniform variate (accelerată respectiv întîrziată).

Valori particulare ale vitezei unui mobil pot fi: viteza în momentul începerii mișcării $v_0 = v(t_0)$, în particular $v_0 = v(0)$ sau vitezele în oricare alte momente ale mișcării $v_1 = v(t_1)$, $v_2 = v(t_2)$. Aceste valori diferă între ele numai în cazul mișcării neuniforme: în cazul mișcării uniforme ele sînt toate egale între ele.

Oricare dintre aceste valori pot fi pozitive, negative sau nule, fapt care indică respectiv că mobilul se deplasează în sensul pozitiv al axei Ox , în sensul contrar acestuia sau că în momentul considerat se află în repaus;

ω — viteza unghiulară a punctului mobil aflat în mișcare circulară sau a solidului aflat în mișcare de rotație. Toate cele afirmate mai sus despre viteza liniară v sînt valabile și pentru viteza unghiulară ω ;

a — accelerația liniară a unui punct mobil aflat în mișcare rectilinie pe o axă Ox ; ea este constantă și diferită de zero în cazul mișcării rectilinii uniform variate și nulă în cazul mișcării uniforme. La mișcarea uniform accelerată ea este orientată în același sens cu viteza v a mobilului, iar la mișcarea uniform întârziată este orientată în sens contrar vitezei mobilului. În tot timpul mișcării ea are o singură valoare (mișcare rectilinie uniformă și uniform variată), spre deosebire de coordonata x și de viteza v care au valori variabile;

ε — accelerația unghiulară a unui punct mobil aflat în mișcare circulară sau a unui solid rigid aflat în mișcare de rotație. Cele afirmate despre accelerația liniară rămîn valabile și pentru accelerația unghiulară ε .

Între mărimile de mai sus există următoarele relații:

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Informațiile pe care ni le furnizează enunțul unei probleme cu privire la evenimentele cinematice, în care sînt implicate mobilele din problema respectivă, se traduc analitic prin relații între mărimile de aceeași natură menționate mai sus. Iată cîteva exemple:

— un mobil ajunge, trece sau sosește într-un punct de pe traiectorie a cărui abscisă este $x = d$ la ora $t = t_1$

$$x(t_1) = d;$$

— un mobil (1) se întâlnește cu alt mobil (2) la ora (cunoscută sau nu) în punctul de abscisă $x = d$ dată

$$x_1(t_1) = x_2(t_1) = d$$

sau numai

$$x_1(t_1) = x_2(t_1)$$

cînd d este necunoscut;

— un mobil se oprește la ora $t = t_1$

$$v(t_1) = 0;$$

— un mobil se deplasează la ora $t = t_1$ în sensul pozitiv al axei Ox respectiv negativ

$$v(t_1) > 0 \text{ respectiv } v(t_2) < 0;$$

— două mobile (1 și 2) se deplasează la ora $t = t_1$ în același sens respectiv în sensuri contrare

$$v_1 \cdot v_2 > 0 \text{ respectiv } v_1 \cdot v_2 < 0$$

independent de sensul axei;

— două mobile (1 și 2) se află la un moment dat $t = t_1$ la distanța d unul față de celălalt

$$x_2(t_1) - x_1(t_1) = d;$$

— două mobile (1 și 2) se întîlnesc la ora t_1 de două ori, o dată sau niciodată

$$x_1(t_1) = x_2(t_1);$$

ecuația trebuie să aibă două rădăcini reale (t'_1 și t''_1), o singură rădăcină reală sau niciuna (rădăcini complexe).

3.2.3. *Ecuațiile metodei.* Prin *ecuația de mișcare* se înțelege expresia coordonatei sale liniare sau unghiulare și a vitezei la un moment dat; o formă de scriere a acestor ecuații este următoarea:

— pentru mișcarea rectilinie și uniformă

$$x = \pm v(t \pm t_0) \pm x_0, \quad v_x = \pm v = \text{const}; \quad (3.1)$$

— mișcarea rectilinie uniform variată

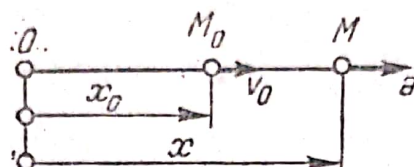
$$x = \pm \frac{1}{2} a(t \pm t_0)^2 \pm v_0(t \pm t_0) \pm x_0 \quad (3.2)$$

$$v = \pm a(t \pm t_0) \pm v_0.$$

În aceste ecuații mărimile v , t_0 și x_0 pentru mișcarea rectilinie și uniformă, respectiv a , t_0 , v_0 și x_0 pentru mișcarea rectilinie uniform variată, se iau în modul,

semnele din fața lor urmînd să fie alese după următoarele considerente:

— pentru v (mișcarea uniformă) respectiv pentru a și v_0 (mișcarea uniform variată) se ia semnul plus dacă sensul lor coincide cu cel ales pentru axa Ox și semnul minus în cazul contrar (fig. 3.1);



$O \xrightarrow{x}$							
$x_0 \rightarrow$	+	$x_0 \rightarrow$	+	$x_0 \rightarrow$	+	$x_0 \rightarrow$	+
$v_0 \rightarrow$	+	$v_0 \rightarrow$	+	$v_0 \leftarrow$	-	$v_0 \leftarrow$	-
$a \rightarrow$	+	$a \leftarrow$	-	$a \rightarrow$	+	$a \leftarrow$	-
$x_0 \leftarrow$	-	$x_0 \leftarrow$	-	$x_0 \leftarrow$	-	$x_0 \leftarrow$	-
$v_0 \rightarrow$	+	$v_0 \rightarrow$	+	$v_0 \leftarrow$	-	$v_0 \leftarrow$	-
$a \rightarrow$	+	$a \leftarrow$	-	$a \rightarrow$	+	$a \leftarrow$	-
$\xleftarrow{x} O$							
$x_0 \rightarrow$	-	$x_0 \rightarrow$	-	$x_0 \rightarrow$	-	$x_0 \rightarrow$	-
$v_0 \rightarrow$	-	$v_0 \rightarrow$	-	$v_0 \leftarrow$	+	$v_0 \leftarrow$	+
$a \rightarrow$	-	$a \leftarrow$	+	$a \rightarrow$	-	$a \leftarrow$	+
$x_0 \leftarrow$	+	$x_0 \leftarrow$	+	$x_0 \leftarrow$	+	$x_0 \leftarrow$	+
$v_0 \rightarrow$	-	$v_0 \rightarrow$	-	$v_0 \leftarrow$	+	$v_0 \leftarrow$	+
$a \rightarrow$	-	$a \leftarrow$	+	$a \rightarrow$	-	$a \leftarrow$	+

Fig. 3.1

— pentru t_0 se ia semnul plus dacă mobilul își începe mișcarea la o oră anterioară orei zero și minus în caz contrar; dacă într-o problemă se pornește ceasornicul în momentul plecării primului mobil, în ecuațiile de mișcare ale tuturor celorlalte mobile (care pleacă deci după ora zero) va apare semnul minus în fața lui t_0 ;

— pentru x_0 semnul se ia ca în geometria analitică: dacă punctul din care pleacă mobilul se află în partea pozitivă a axei Ox se ia semnul plus, iar dacă el se află pe partea negativă se ia semnul minus.

În aceste condiții, x la mișcarea uniformă, respectiv x și v la mișcarea uniform variată pot rezulta pozitive, negative sau nule, la un moment dat t .

Un alt mod de scriere a acestor ecuații este acela în care dublul semn este înlocuit peste tot cu semnul plus, rezolvitorul avînd grijă să scrie în fața mărimii respective semnul minus atunci cînd este cazul (semne incluse). Noi am preferat primul mod de scriere.

Efectuînd schimbarea de notații $x \rightarrow \theta$, $v \rightarrow \omega$, $a \rightarrow \varepsilon$ rezultă ecuațiile mișcării circulare sau de rotație:

— mișcarea uniformă

$$\theta = \pm \omega (t \pm t_0) \pm \theta_0; \quad (3.3)$$

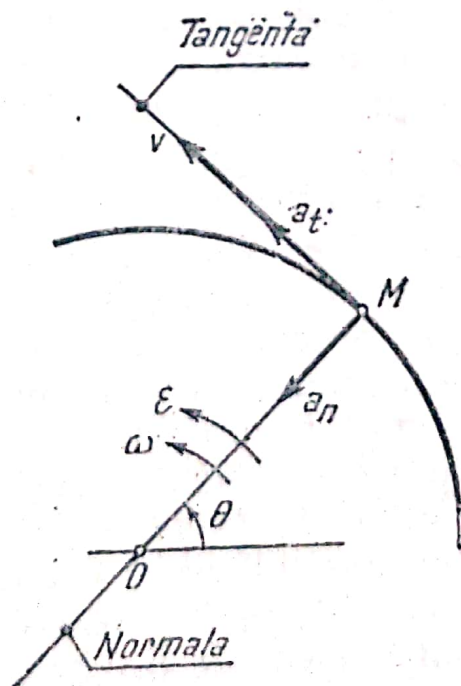


Fig. 3.2

— mișcarea uniform variată

$$\theta = \pm \frac{1}{2} \varepsilon (t \pm t_0)^2 \pm \omega_0 (t \pm t_0) \pm \theta_0 \quad (3.4)$$

$$\omega = \varepsilon (t \pm t_0) \pm \omega_0.$$

Mărimile liniare de la mișcarea circulară se calculează cu relațiile cunoscute (fig. 3.2):

— viteza liniară $v = R\omega$,

— accelerația tangențială $a_t = R\varepsilon$,

— accelerația normală $a_n = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} = v\omega$.

3.2.4. *Programul metodei.* Operațiile acestui program sînt arătate în figura 3.3. Ele constau în următoarele:

a) Din lectura primei părți a problemei se alcătuiește așa numita „figură generală” sau schemă, care reprezintă figura la un moment oarecare a evenimentelor din problemă.

Pe această figură se reprezintă axa de referință cu originea, direcția și sensul ales arbitrar (rezultatele finale sînt independente de aceste alegeri), după care se alege originea timpului (momentul pornirii ceasornicului).

b) Urmează apoi scrierea ecuațiilor de mișcare ale tuturor mobilelor care evoluează în problema respectivă, operație care constă în particularizarea ecuațiilor de mișcare pentru situațiile date (valori absolute și semne).

c) În etapa următoare se examinează cu atenție textul problemei spre a depista *toate* informațiile pe care acesta ni le oferă despre evenimentele din problemă, care vor fi rînd pe rînd traduse sub formă analitică folosind ecuațiile de mișcare. Dacă la traducerea lor analitică întîmpinăm greutăți ne putem ajuta de anumite figuri particulare, care reprezintă diferite momente din problemă (întîlniri, opriri, ajungeri ș.a.).

Se obțin astfel ecuațiile problemei care se rezolvă conform indicațiilor programelor următoare.

3.2.5. *Indicații și precizări.* Pentru aplicarea acestei metode trebuie avute în vedere următoarele:

— rezolvatorul va reține faptul că în această metodă se folosesc coordonatele mobilelor și nu spațiile parcurse

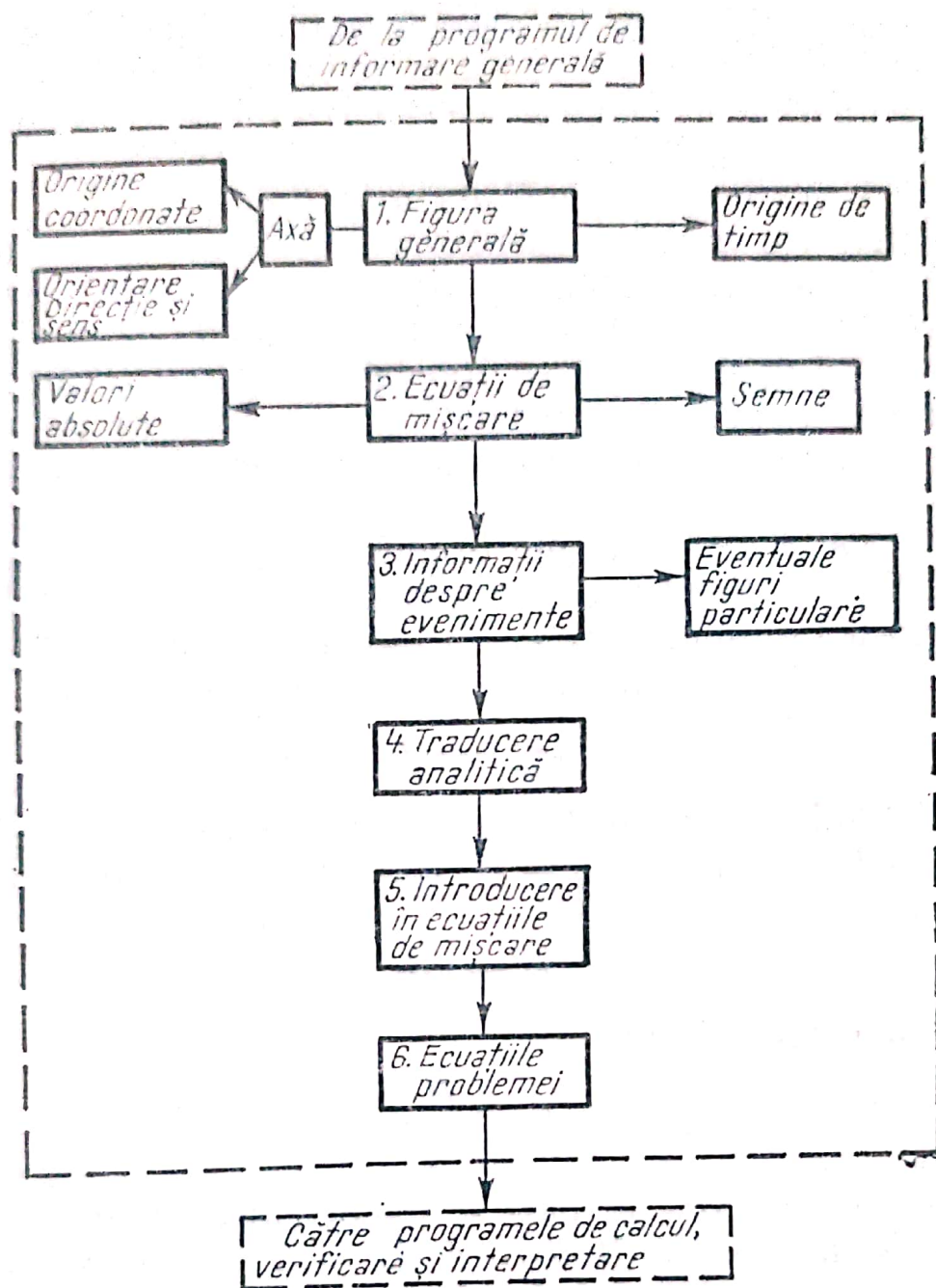


Fig. 3.3

de ele; la început aceasta îi va provoca oarecare dificultăți, dar după rezolvarea unui anumit număr de probleme se va obișnui cu acest procedeu;

— mișcările tuturor mobilelor dintr-o problemă se raportează la aceeași origine de coordonate; nu se va raporta mișcarea unora față de un punct fix și a altora față de alt punct fix;

— mișcările tuturor mobilelor dintr-o problemă se raportează la același ceasornic (origine a timpului)

care este potrivit la un anumit moment ales de cel ce rezolvă problema; nu se va schimba originea timpului. pe parcursul rezolvării aceleiași probleme decât în cazuri bine justificate.

3.2.6. *Exemple de aplicare a metodei*

E 3.1. Un mobil se deplasează rectiliniu și uniform între două puncte A și B , situate la distanța D unul de celălalt: astfel; pleacă din A , merge spre B cu viteza constantă v_1 și fără să se oprească se întoarce către A , mergînd cu viteza constantă v_2 . Se cere să se scrie ecuațiile de mișcare ale mobilului la ducere și la întoarcere.

Rezolvare. Alegem originea coordonatelor în A , axa Ox pe direcția AB orientată de la A către B și originea timpului la plecarea mobilului din A . Ecuația de mișcare a mobilului la ducere este [v. (3.1)]

$$x_d = v_1 t.$$

Mobilul ajunge în B atunci cînd pentru $t = t_1$ (ora sosirii în B) avem $x_d = D$, care tradusă analitic conduce la

$$D = v_1 t_1$$

de unde rezultă ora

$$t_1 = \frac{D}{v_1}.$$

La această oră el pleacă înapoi către A cu viteza v_2 , orientată de la B către A (în sens contrar sensului axei Ox), din punctul de abscisă $x_0 = D$; ecuația de mișcare a mobilului la întoarcere este

$$\begin{aligned} x_i &= -v_2(t - t_1) + D = \\ &= -v_2\left(t - \frac{D}{v_1}\right) + D \end{aligned}$$

sau

$$x_i = -v_2 t + D\left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right).$$

Pentru cazul particular $v_1 = v_2 = v$ rezultă

$$x_i = -v_2 t + 2D$$

care reprezintă ecuația de mișcare a unui mobil ce pleacă din A o dată cu mobilul (la $t = 0$), din punctul de abscisă $x_0 = 2D$, fapt care coincide cu fenomenul fizic.

Pentru ca mobilul să descrie numai segmentul AB (dus și întors) și să nu iasă în afara lui trebuie ca t să varieze în următoarele intervale:

$$\text{— la ducere} \quad 0 \leq t \leq t_1, \text{ adică } 0 \leq t \leq \frac{D}{v_1};$$

$$\text{— la întoarcere} \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

unde t_2 reprezintă ora sosirii mobilului în A la întoarcere, care se determină din condiția:

$$\text{pentru } t = t_2 \text{ trebuie să avem } x_2 = 0.$$

Se observă deosebirea dintre spațiul parcurs și coordonata mobilului, aceasta din urmă fiind nulă la sfârșitul întoarcerii, în timp ce spațiul parcurs la întoarcere este D . Rezultă

$$0 = -v_2 t_2 + D \left(1 + \frac{v_2}{v_1} \right)$$

de unde

$$t_2 = \frac{D}{v_2} \left(1 + \frac{v_2}{v_1} \right) = D \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)$$

sau în cazul particular $v_1 = v_2 = v$

$$t_2 = \frac{2D}{v}.$$

E 3.2. Două automobile au pornit simultan din același punct, pe aceeași direcție și în același sens. Primul automobil are viteza a km/oră, iar al doilea b km/oră. După $t_1 = 0,5$ ore din același punct a pornit al treilea automobil, cu viteza c , care, ajungându-l pe al doilea, a mai avut de parcurs $t_2 = 1,5$ ore, pînă să-l ajungă pe primul.

Se cere să se determine viteza c a celui de al treilea automobil în ipoteza că mișcarea celor trei automobile este uniformă.

Observație. Înainte de a începe rezolvarea problemei se observă din ordinea de întâlnire că $c > a > b$, deoarece al treilea automobil trebuie să meargă cel mai repede, el ajungându-l în ordine întâi pe cel de al doilea, iar apoi pe primul.

Rezolvare. Procedăm conform programului metodei ecuațiilor de mișcare:

— axa de referință se alege pe direcția comună de mișcare, orientată în sensul comun al mișcării celor trei vehicule (spre dreapta);

— originea coordonatelor se alege în punctul comun de plecare A:

— originea timpului se alege în momentul plecării primelor două automobile; figura generală care reprezintă situația la un moment oarecare este E 3.2.

Ecuatiile de mișcare ale celor trei automobile [v. (3.1)]

$$x_1 = at, \quad x_2 = bt, \quad x_3 = c(t - t_1).$$

Informațiile care se obțin din enunțul problemei cu privire la mișcările celor trei vehicule sînt următoarele:

a) al treilea automobil îl ajunge pe cel de al doilea. Pentru $t = t'$ (ora necunoscută a întîlnirii) avem $x_3 = x_2$, care se traduce analitic astfel

$$c(t' - t_1) = bt'; \quad (1)$$

b) al treilea automobil îl ajunge pe primul. Pentru $t = t''$ (ora necunoscută a întîlnirii) avem $x_3 = x_1$, care se traduce analitic astfel

$$c(t'' - t_1) = at'' \quad (2)$$

și c) informația din problemă

$$t'' = t' + t_2. \quad (3)$$

Au rezultat trei ecuații (1), (2) și (3) obținute din introducerea informațiilor din enunț în ecuațiile de mișcare; ele conțin trei necunoscute: t , t'' și c , din care se cere numai valoarea vitezei c .

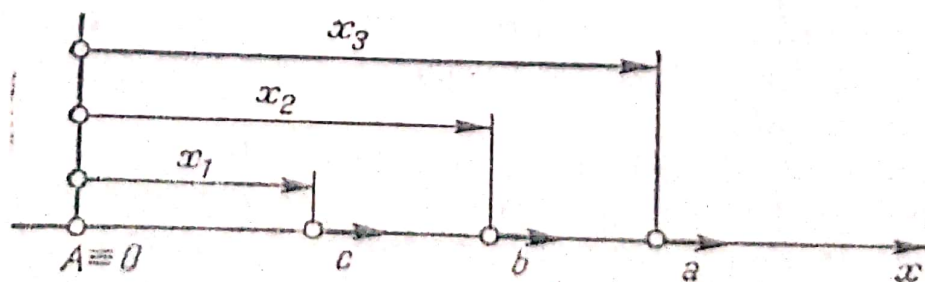


Fig. E 3.2

Din (1) obținem

$$t' = \frac{ct_1}{c-b}$$

și din (2) rezultă

$$t'' = \frac{ct_1}{c-a}$$

care, introduse în (3), conduc la

$$\frac{ct_1}{c-a} = \frac{ct_1}{c-b} + t_2$$

din care rezultă ecuația

$$t_2 c^2 - [a(t_1 + t_2) + b(t_2 - t_1)] c + abt_2 = 0.$$

Înlocuind valorile lui t_1 și t_2 date în enunț rezultă ecuația

$$3c^2 - 2(2a + b)c + 3ab = 0$$

cu soluțiile

$$c = \frac{2a + b \pm \sqrt{4a^2 - 5ab + b^2}}{3}$$

și condiția

$$\Delta = 4a^2 - 5ab + b^2 > 0$$

care se scrie ($b > 0$)

$$4\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\left(\frac{a}{b}\right) + 1 > 0$$

și care este satisfăcută deoarece $a/b > 1$; dintre cele două rădăcini convine aceea pentru care $c > 0$, adică

$$c = \frac{2a + b + \sqrt{4a^2 - 5ab + b^2}}{3}.$$

Observație. Această problemă se găsește rezolvată prin metoda spațiilor în Gazeta Matematică nr. 5/1972.

E 3.3. Un tren accelerat a , un tren personal p și un tren de marfă m circulă între două orașe A și B .

Personalul pleacă din A cu $T_1 = 1$ oră mai târziu decât mărfarul din B . Viteza medie a personalului este $v_p = 40$ km/oră și a mărfarului $v_m = 30$ km/oră.

Acceleratul parcurge distanța $AB = D$ în $T_2 = 5$ ore. Acceleratul pleacă din B în momentul cînd perso-

nalul a întâlnit mărfarul și întâlnește personalul când acesta s-a distanțat de mărfar cu $d = 105$ km.

Se cere viteza medie v_a a acceleratului și distanța D dintre cele două orașe. [15, 9/51].

Rezolvare. Procedăm conform programului metodei ecuațiilor de mișcare:

— axa de referință o alegem în direcția AB , orientată de la A spre B ;

— originea coordonatelor o alegem în A ($A \equiv O$);

— originea timpului o alegem în momentul plecării mărfarului; figura generală care reprezintă situația la un moment oarecare este reprezentată în E 3.3.

Pe lângă figura generală au mai fost reprezentate și o serie de figuri particulare corespunzătoare informa-

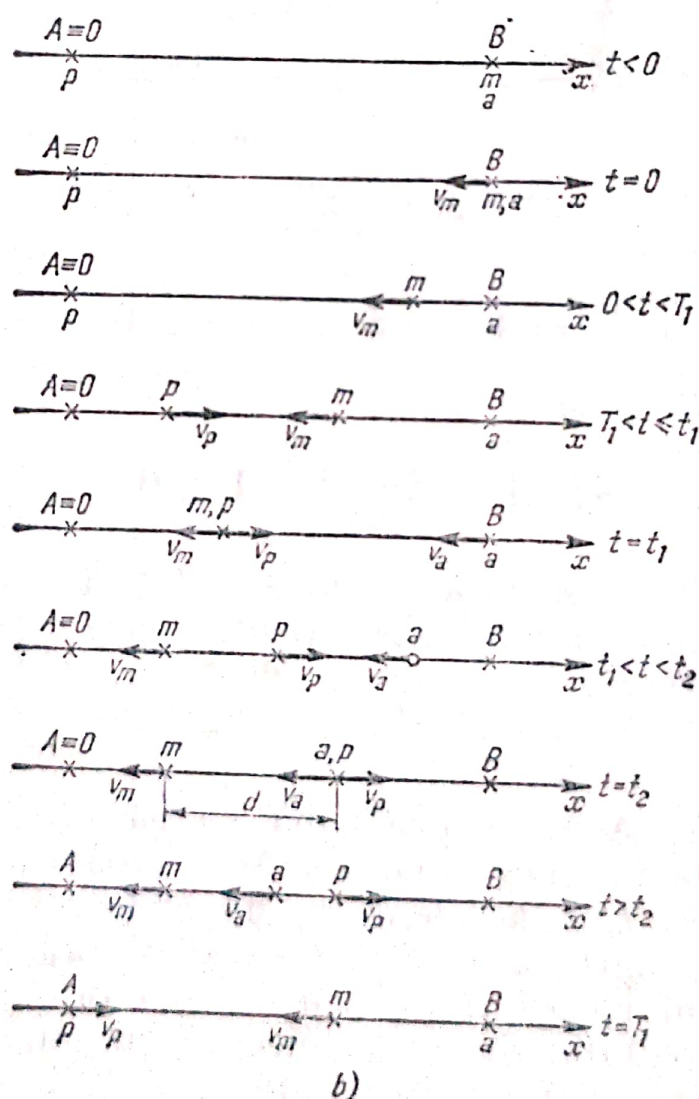


Fig. E 3.3

țiilor din enunțul problemei; reprezentarea unei sau mai multor asemenea situații particulare nu este necesară decât atunci când traducerea analitică a informațiilor o cere în mod expres.

Ecuațiile de mișcare ale celor trei mobile sînt [v. (3.1)]:

$$x_m = -v_m t + D$$

deoarece mărfarul merge de la B către A cu viteza v_m (în ecuație $-v_m$) și pleacă la $t = 0$ din punctul B de coordonată $x_0 = D$;

$$| \quad x_p = v_p(t - T_1)$$

deoarece personalul merge de la A către B cu viteza v_p (în ecuație $+v_p$), pleacă la ora T_1 după ora zece (în ecuație $-T_1$) din punctul de coordonată zero ($A \equiv 0$);

$$x_a = -v_a(t - t_1) + D$$

deoarece acceleratul merge de la B către A cu viteza v_a (în ecuație $-v_a$), pleacă la ora t_1 după ora zece (în ecuație $-t_1$) din punctul B de coordonată $x_0 = D$, unde t_1 reprezintă ora la care personalul a întâlnit mărfarul.

Informațiile pe care le deținem din enunțul problemei cu privire la mișcările celor trei trenuri (în afara celor pe care le-am folosit la scrierea ecuațiilor) sînt, în ordinea din enunț:

a) — acceleratul parcurge distanța $AB = D$ în timpul T_2 , tradusă analitic astfel

$$D = v_a T_2; \quad (1)$$

b) — la $t = t_1$ personalul întâlnește mărfarul, adică pentru $t = t_1$ avem $x_m = x_p$ (fig. E 3.3., b), tradusă analitic astfel

$$-v_m t_1 + D = v_p(t_1 - T_1). \quad (2)$$

c) — la $t = t_2$ acceleratul întâlnește personalul, adică pentru $t = t_2$, $x_a = x_p$, tradusă analitic astfel

$$-v_a(t_2 - t_1) + D = v_p(t_2 - T_1); \quad (3)$$

d) la același moment $t = t_2$ când acceleratul întâlnește personalul, între acesta din urmă și mărfar există distanța d , adică pentru $t = t_2$, $x_p - x_m = d$ (fig. 3.3, b), tradusă analitic astfel

$$v_p(t_2 - T_1) - (-v_m t_2 + D) = d. \quad (4)$$

Informațiile din enunț fiind epuizate, din traducerea lor analitică au rezultat patru ecuații cu patru necunoscute: v_a , D , t_1 și t_2 , dintre care sînt cerute numai primele două.

Pentru rezolvare vom căuta să eliminăm necunoscutele necerute t_1 și t_2 în vederea determinării numai a celor cerute, v_a și D . Procedăm astfel:

— din (2) determinăm, pe t_1 ca funcție de D

$$t_1 = \frac{D + v_p T_1}{v_p + v_m}; \quad (5)$$

— din (3) determinăm pe t_2 ca funcție de D

$$t_2 = \frac{d + D + v_p T_1}{v_p + v_m} = t_1 + \frac{d}{v_p + v_m}; \quad (6)$$

— din (1) determinăm pe v_a ca funcție de D

$$v_a = \frac{D}{T_2};$$

— introducem toate aceste valori în ecuația (4), care va conține astfel numai necunoscuta D ; după efectuarea calculelor rezultă

$$D = \frac{T_2 v_p (d - T_1 v_m)}{T_2 v_m - d} = \frac{5 \times 40 (105 - 1 \times 30)}{5 \times 30 - 105} = 333,33 \text{ km.}$$

Din (1) rezultă imediat valoarea vitezei v_a

$$v_a = \frac{D}{T_2} = \frac{333,33}{5} = 56,66 \text{ km/oră.}$$

Problema este astfel rezolvată. Să determinăm suplimentar și valorile celorlalte două necunoscute pentru eventualele verificări. Din (5) și (6) rezultă respectiv

$$t_1 = \frac{333,33 + 40 \times 1}{40 + 30} = 5,33 \text{ ore} = 5^h 19' 48''$$

$$t_2 = \frac{105 + 333,33 + 40 \times 1}{40 + 30} = 6,83 \text{ ore} = 6^h 49' 48''.$$

Programul acestei metode este astfel epuizat în condițiile problemei date.

E 3.4. Se cere să se determine orele t_1 și t_2 la care limbile unui ceasornic se află în prelungire și respectiv suprapuse. [7]

Rezolvare. Procedăm conform programului metodei ecuațiilor de mișcare aplicate mișcării circulare sau de rotație: „axa” $O\theta$, originea de măsurare a „abscisei” θ , originea timpului (ora zero) și figura

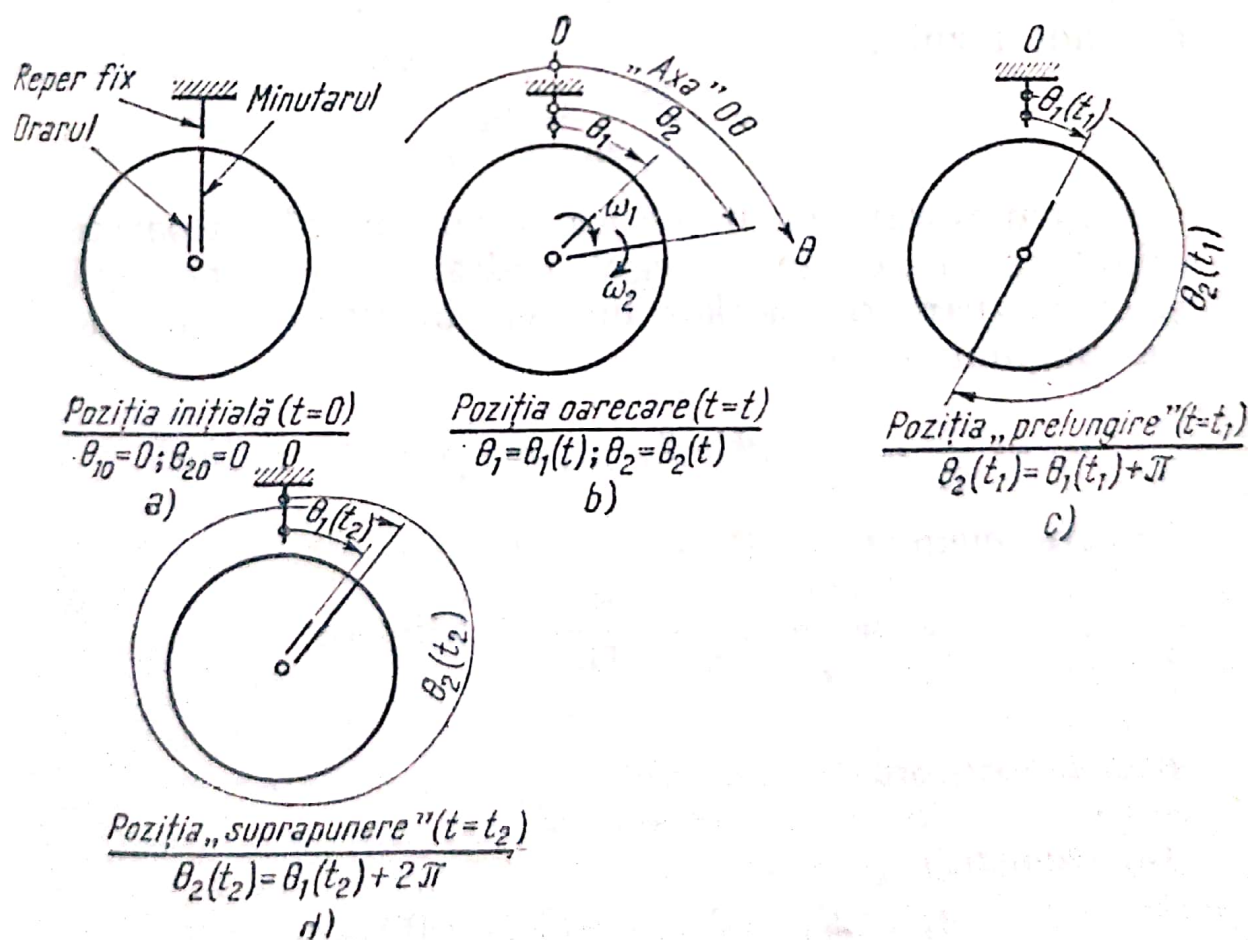


Fig. E 3.4

generală (poziția oarecare) sînt reprezentate în fig. E 3.4, a și b.

Ecuatiile de mișcare ale celor două limbi sînt [v. (3.3)]

$$\theta_1 = \omega_1 t \quad \text{și} \quad \theta_2 = \omega_2 t$$

deoarece ambele pleacă fără coordonată inițială la ora $t = 0$ și au mișcări uniforme cu vitezele unghiulare ω_1 respectiv ω_2 .

Informația „prelungire”, înseamnă că pentru $t = t_1$, $\theta_2 = \theta_1 + \pi$, tradusă analitic astfel

$$\omega_2 t_1 = \omega_1 t_1 + \pi$$

de unde rezultă

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

Informația „suprapunere”, înseamnă că pentru $t = t_2$, $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi$, tradusă analitic astfel

$$\omega_2 t_2 = \omega_1 t_2 + 2\pi$$

de unde rezultă

$$t_2 = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = 2t_1.$$

Pentru rezolvarea numerică observăm că, deoarece minutarul parcurge întregul cadran (2π) într-o oră și orarul parcurge același interval în 12 ore, vitezele lor unghiulare sînt

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \text{ rad/oră}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ rad/oră}$$

cu care avem

$$t_1 = \frac{\pi}{2\pi - \frac{\pi}{6}} = \frac{6}{11} = 0,545 \text{ ore}$$

deci t_1 este ora

$$0^h 32' 42''.$$

De asemenea

$$t_2 = 2t_1 = 2 \times 0,545 = 1,09 \text{ ore}$$

deci t_2 este ora $1^h 5' 24''$.

E 3.5. Un mobil este aruncat vertical în sus cu viteza v_0 ; se cere să se arate că ecuațiile de mișcare la ducere și întoarcere coincid.

Rezolvare. Orientăm axa Ox în sus, cu originea coordonatelor la nivelul solului și originea timpului în momentul plecării mobilului; ecuația sa de mișcare este [v.(3.2)]

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t; \quad v = -gt + v_0.$$

Se știe că mobilul atinge punctul cel mai înalt de coordonată

$$x_1 = \frac{v_0^2}{2g}$$

la ora

$$t_1 = \frac{v_0}{g}.$$

Mișcarea de întoarcere este mișcarea unui mobil care pleacă cu viteza inițială nulă, din punctul de coordonată x_1 la ora t_1 , adică

$$x' = -\frac{1}{2}g(t - t_1)^2 + x_1$$

sau

$$x' = -\frac{1}{2}g\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{v_0^2}{2g} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t = x$$

deci

$$x'(t) = x(t).$$

Prin urmare, atât mișcarea de ducere cât și cea de întoarcere sînt descrise de *aceeași ecuație* nu ca în cazul mișcării rectilinii și uniforme unde ne-au trebuit *două ecuații* pentru cele două mișcări (ducere, respectiv întoarcere).

E 3.6. Se cere să se determine înălțimea maximă și timpul necesar atingerii ei de către un mobil aruncat de la sol vertical în sus cu viteza v_0 .

Rezolvare. Orientăm axa Ox în sus cu originea coordonatelor la nivelul solului și originea timpului în

momentul plecării mobilului. Ecuația de mișcare este [v. (3. 2)]

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t; \quad v = -gt + v_0.$$

Pentru determinarea înălțimii maxime trebuie să cunoaștem fenomenul fizic; în acest punct mobilul rămîne un moment în repaus, deci pentru

$$t = t_1 \text{ avem } v = 0$$

adică

$$0 = -gt_1 + v_0$$

de unde rezultă

$$t_1 = \frac{v_0}{g}$$

cu care coordonata punctului cerut devine

$$x(t_1) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{g}\right) = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Observație. Chiar dacă nu am fi cunoscut fenomenul fizic am fi putut rezolva problema, deoarece informația „înălțimea maximă” se traduce prin aceea că trebuie determinat extremul funcției $x = x(t)$, adică pentru

$$t = t_1 \text{ avem } \frac{dx}{dt} = 0;$$

dar cum

$$\frac{dx}{dt} = v$$

rezultatele obținute sînt cele de mai sus.

E 3.7. Se cere să se calculeze spațiul parcurs de un mobil aruncat vertical în sus cu viteza inițială v_0 , din momentul aruncării pînă la momentele $t_1 = \frac{v_0}{g}$ și $t_2 = \frac{3v_0}{2g}$, și să se deducă de aici că ecuația „spațiului” reprezintă de fapt expresia coordonatei mobilului.

Rezolvare. Folosim ecuația spațiului parcurs de mobil de la momentul $t = 0$ pînă la momentul t

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t.$$

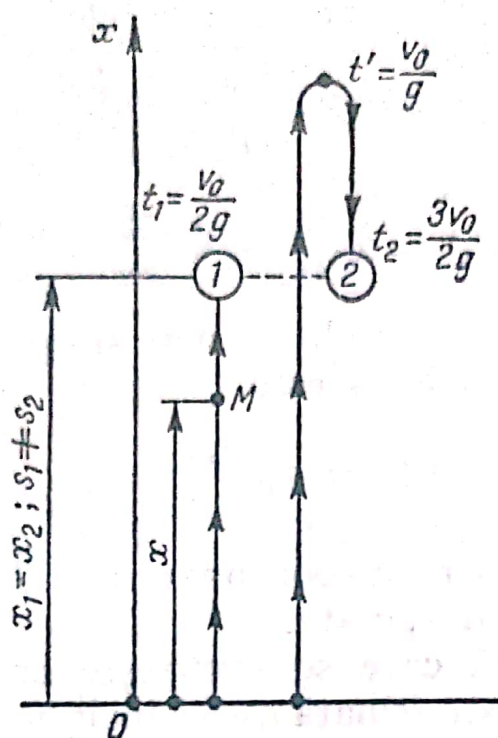


Fig. E 3.7

Avem

$$s(t_1) = -\frac{g}{2} \left(\frac{v_0}{2g} \right)^2 + v_0 \left(\frac{v_0}{2g} \right) = \frac{3}{8} \frac{v_0^2}{g}.$$

$$s(t_2) = -\frac{g}{2} \left(\frac{3v_0}{2g} \right)^2 + v_0 \left(\frac{3v_0}{2g} \right) = \frac{3}{8} \frac{v_0^2}{g}.$$

Din această ecuație rezultă că mobilul a parcurs același spațiu între momentele $(0, v_0/2g)$ respectiv $(0, 3v_0/2g)$, ceea ce este inexact. În realitate $s(t)$ reprezintă coordonata mobilului la momentul t și nu spațiul parcurs în intervalul $(0, t)$ și anume $s(t_1)$ este coordonata de ducere și $s(t_2)$ coordonata de întoarcere. Faptul că $s(t_1) = s(t_2)$ se explică prin aceea că la timpii considerați mobilul trece prin același punct cu viteze egale și în sensuri contrare; într-adevăr

$$v(t) = -gt + v_0$$

$$v(t_1) = -g \frac{v_0}{2g} + v_0 = \frac{1}{2} v_0$$

$$v(t_2) = -g \frac{3v_0}{2g} + v_0 = -\frac{1}{2} v_0.$$

Spațiul parcurs între momentele menționate are valorile (fig. E 3.7)

$$s_1 = s(t_1) = \frac{3v_0^2}{8g}$$

$$s_2 = s(t_2) = 2 \frac{v_0^2}{2g} - \frac{3}{8} \frac{v_0^2}{2g} = \frac{13}{8} \frac{v_0^2}{2g}.$$

Observație. Un exemplu și mai simplu pentru ilustrarea celor de mai sus este

$$s(0) = s\left(\frac{2v_0}{g}\right) = 0$$

rezultat valabil pentru coordonata mobilului, nu pentru spațiul parcurs de acesta.

E 3.8. O roată care se învîrtește cu turația $n_0 = 300$ rot/min este frînata astfel încît se mișcă uniform întîrziat pînă la oprire. Se cere să se determine valoarea accelerației unghiulare ϵ din timpul frînării și numărul total N de ture efectuat de roată de la începutul frînării pînă la oprire, știind că din momentul frînării și pînă la oprire au trecut $t_1 = 30''$ [7].

Rezolvare. Procedăm conform programului metodei ecuațiilor de mișcare aplicat mișcării de rotație (fig. E 3.8):

- „axa” $O\theta$ este orientată în sensul mișcării acelor de ceasornic;
- originea coordonatelor unghiulare θ se alege în momentul începerii frînării;

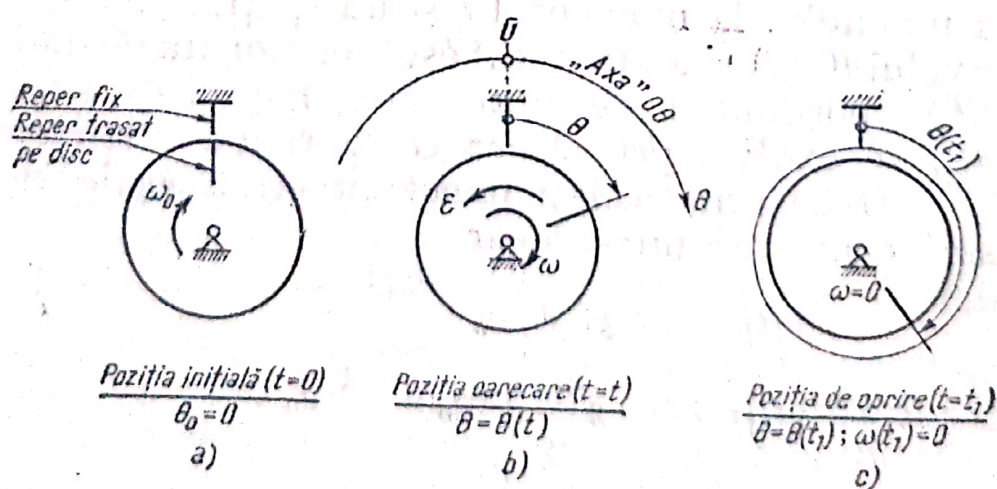


Fig. E 3.8

— originea timpului (ora zero) se alege în momentul începerii frînării; figura generală (poziția oarecare) este E 3.8, b.

Figurile E 3.8. a și c reprezintă respectiv poziția inițială și cea de oprire.

Ecuția de mișcare a rotației este [v. (3.4)]

$$\theta = -\frac{1}{2} \varepsilon t^2 + \omega_0 t$$

deoarece roata se mișcă uniform încetinit ($-\varepsilon$, căci ε are sens contrar „axeii” $O\theta$) cu viteza unghiulară inițială ω_0 ($+\omega_0$, deoarece ω_0 are același sens cu $O\theta$), fără coordonată unghiulară inițială ($\theta_0 = 0$), începîndu-și această mișcare la ora zero ($t_0 = 0$).

Prin derivare în raport cu timpul se obține viteza unghiulară a roții la un moment oarecare t din timpul frînării ($0 \leq t \leq t_1$)

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = -\varepsilon t + \omega_0.$$

În enunțul problemei există numai informația „oprire”, care înseamnă că pentru $t = t_1$, $\omega = 0$, tradusă analitic astfel

$$0 = -\varepsilon t_1 + \omega_0$$

din care rezultă

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t_1}.$$

Deoarece originea timpului a fost aleasă în momentul începerii frînării, rezultă că t_1 reprezintă atît durata frînării cît și coordonata temporală a momentului frînării.

Ținînd seama de relația dintre viteza unghiulară și turație

$$\omega = \frac{\pi n}{30}$$

rezultă

$$\varepsilon = \frac{\pi n_0}{30 t_1} = \frac{3,14 \cdot 300}{30 \cdot 30} \approx 1 \text{ rad/s}^2.$$

Unghiul parcurs de roată din momentul începerii frînării și pînă la oprire este

$$\theta_1 = \theta(t_1),$$

iar numărul total de ture pînă la oprire este

$$\begin{aligned} N &= \frac{\theta(t_1)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \varepsilon t_1^2 + \omega_0 t_1 \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \frac{\pi n_0}{30 t_1} t_1^2 + \frac{\pi n_0}{30} t_1 \right) = \frac{n_0 t_1}{120} = \frac{300 \cdot 30}{120} = 75 \text{ ture.} \end{aligned}$$

3.3. Metoda mișcării inverse

3.3.1. *Principiul metodei; domeniu de aplicabilitate.*

Metoda mișcării inverse se aplică în acele probleme în care mai multe corpuri se află în mișcare și se cere mișcarea unui corp mobil față de alt corp, de asemenea mobil (mișcarea relativă).

Ea constă în esență din observarea fenomenelor cinematice care au loc în problema respectivă, folosind mișcarea pe care o are unul din corpurile mobile din problemă.

3.3.2. Noțiuni de bază; definiții; notații; relații. Noțiunile folosite în cadrul acestei metode sînt aceleași ca în cazul metodei precedente.

3.3.3. Ecuațiile metodei. În cadrul acestei metode se poate vorbi mai mult de un procedeu decît de ecuații, întrucît ecuațiile care se scriu ca urmare a aplicării acestei metode sînt simple și cunoscute. Procedeu fundamental al acestei metode constă în a da tuturor corpurilor aflate în mișcare într-o problemă o mișcare inversă cu a unuia dintre ele, față de care se cere să se studieze mișcarea celorlalte.

Uneori nu este nici măcar necesar să se ceară acest lucru, însă prin aplicarea acestei metode problema respectivă poate fi reformulată mult mai simplu.

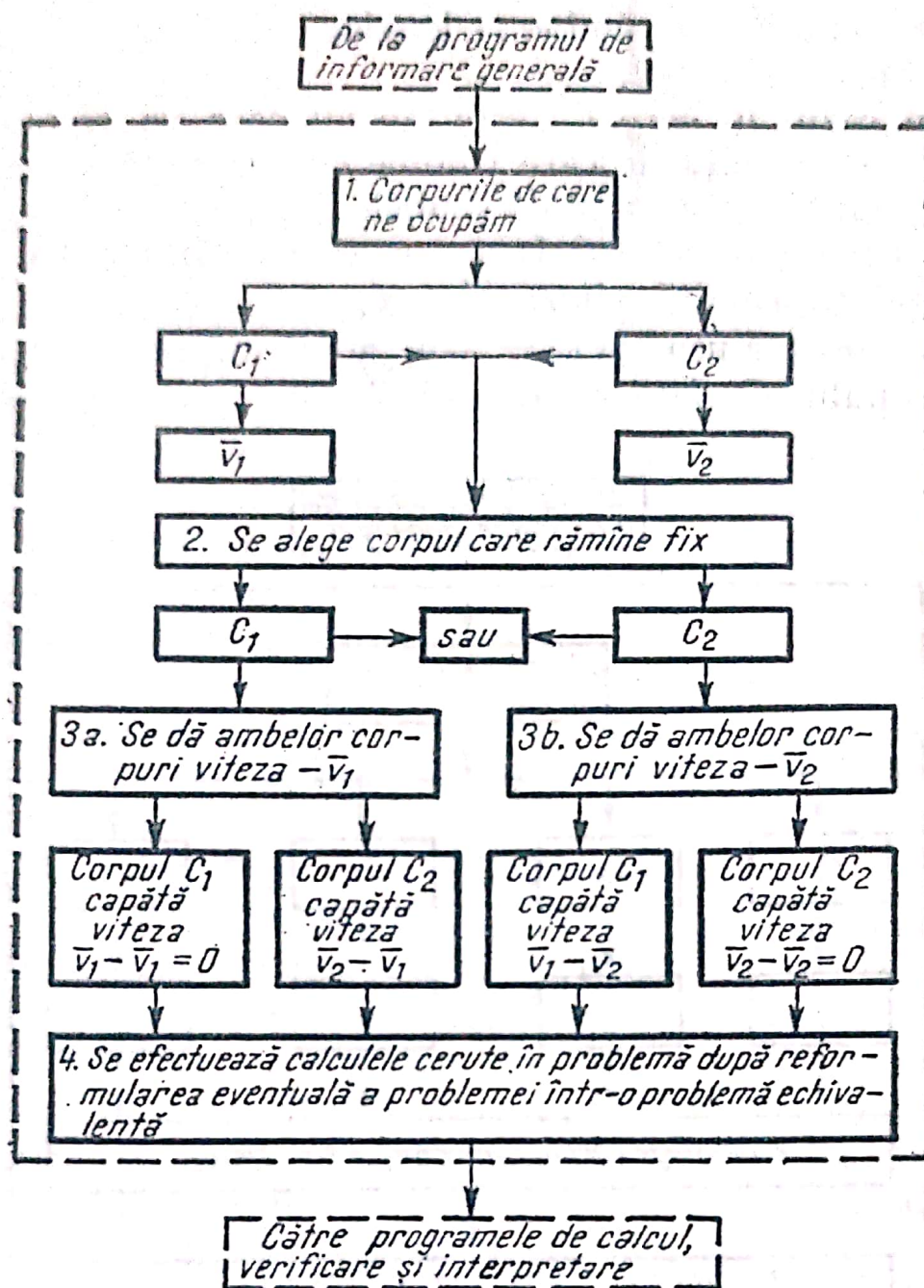


Fig. 3.4

3.3.4. Programul metodei. Operațiile acestui program sînt arătate în fig. 3.4; ele sînt:

- precizarea corpurilor de care ne ocupăm; fie acestea C_1 și C_2 , avînd în acest moment vitezele $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$;
- alegerea dintre aceste două corpuri a celui care rămîne fix (poate fi oarecare dintre ele);

Dacă se alege corpul C_1 , care rămîne fix (față de care trebuie determinată mișcarea corpului C_2), atunci se dă ambelor corpuri viteza $-\bar{v}_1$. Ca urmare a acestui

fapt corpul C_1 va rămâne pe loc, iar corpul C_2 va căpăta viteza $\bar{v}'_2 = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$.

În cazul în care C_2 este corpul care va trebui să rămână fix (față de care trebuie determinată mișcarea corpului C_1) atunci se dă ambelor corpuri viteza $-\bar{v}_2$. Ca urmare a acestui fapt corpul C_2 rămâne fix, iar corpul C_1 capătă viteza $\bar{v}'_1 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$.

Se observă ușor că $\bar{v}'_2 = -\bar{v}'_1$, adică mișcarea relativă a corpului C_2 față de corpul C_1 este inversă mișcării

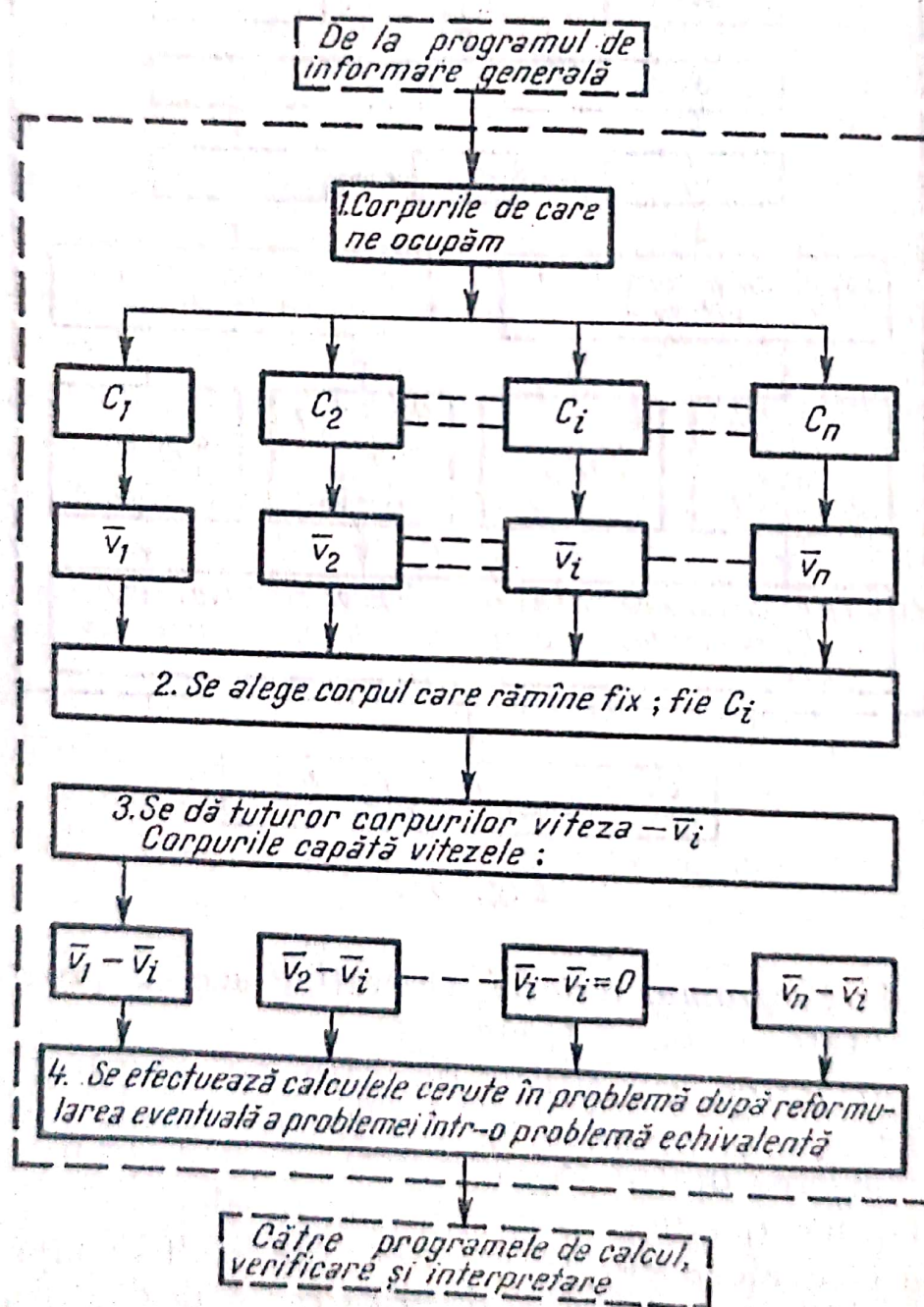


Fig. 3.5

relative a lui C_1 față de C_2 ; această observație va ajuta și ea la rezolvarea unor probleme.

d) După îndeplinirea operațiilor de pînă aici problema de care ne ocupăm s-a transformat într-o alta mult mai simplă; la această etapă fie reformulăm problema dată inițial, fie efectuăm direct calculele cerute în problemă.

Acest program poate fi generalizat pentru cazul cînd în problema respectivă există mai mult decît două corpuri mobile (fig. 3.5).

3.3.5. Indicații și precizări. La aplicarea acestei metode trebuie avute în vedere următoarele:

- procedeul expus poate fi aplicat atît pentru determinări de viteze cît și de accelerații, deși el a fost prezentat numai pentru viteze;

- adunarea tuturor vectorilor (viteze și accelerații) se face numai vectorial; pentru calcul se poate folosi metoda analitică a descompunerii pe axele unui sistem de referință.

3.3.6. Exemple de aplicare a metodei

E 3.9. Două trenuri de lungimi l_1 și l_2 se deplasează pe două linii paralele respectiv cu vitezele v_1 și v_2 .

Se cere să se determine cît timp durează trecerea unuia prin dreptul celuilalt [7].

Rezolvare. Pentru început vom presupune că vitezele celor două trenuri au același sens și că $v_2 > v_1$ (fig. E 3.9, a). Vom da ambelor trenuri o mișcare identică cu mișcarea inversă a trenului 1; ca urmare a acestui fapt trenul 1 va căpăta viteza $v'_1 = v_1 - v_1 = 0$, adică va rămîne pe loc în timp ce trenul 2 va căpăta viteza $v'_2 = v_2 - v_1$, orientată în același sens cu v_2 , deoarece $v_2 > v_1$.

Problema pusă poate fi reformulată în modul următor. Se consideră două borne fixe între care există distanța l_1 ; se cere să se determine cît timp se va afla în spațiul dintre borne un tren de lungime l_2 care circulă cu viteza v'_2 .

Răspunsul la această problemă se obține imediat, observînd că între poziția în care locomotiva intră în

spațiul de lungime l_1 și poziția în care ultimul vagon iese din acest spațiu (fig. E 3.9, b) trece un timp

$$t_1 = \frac{l_1 + l_2}{v_2 - v_1}.$$

Dacă $v_2 < v_1$, atunci trece timpul

$$t_1 = \frac{l_1 + l_2}{v_1 - v_2}.$$

În primul caz trenul 2 ajunge trenul 1 și îl depășește, iar în cel de al doilea caz, trenul 1 ajunge trenul 2 și îl depășește; în ambele cazuri timpul de depășire este același, adică

$$t_1 = \frac{l_1 + l_2}{|v_2 - v_1|}.$$

După un raționament similar deducem că intervalul de timp necesar depășirii, atunci când vitezele celor două trenuri au sensuri contrare, este

$$t_2 = \frac{l_1 + l_2}{v_1 + v_2}$$

cu observația că

$$t_1 > t_2$$

fapt care corespunde fenomenului fizic.

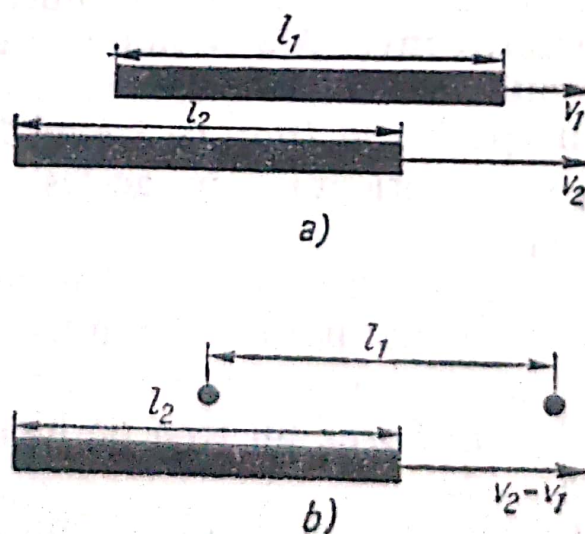


Fig. E 3.9

E 3.10. Un pieton se deplasează în ploaie cu viteza orizontală v_1 , în timp ce picăturile de ploaie cad vertical cu viteza v_2 .

Se întreabă care este unghiul optim de înclinare al umbrelei pietonului în raport cu verticala, astfel încât acesta să fie cât mai bine apărat de ploaie (fig. E 3.10, a).

Rezolvare. În baza programului metodei mișcării inverse dăm ambelor corpuri o viteză egală și de sens contrar cu cea a omului; aflăm astfel direcția de mișcare a ploii față de om, care reprezintă totodată și direcția după care trebuie orientată umbrela.

Unghiul cerut în problemă este dat de figura E 3.10, b:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_1}{v_2}.$$

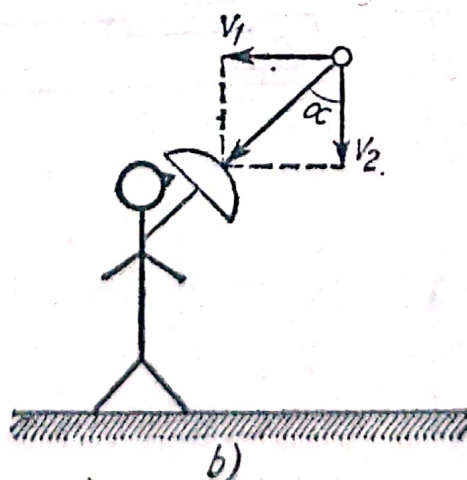
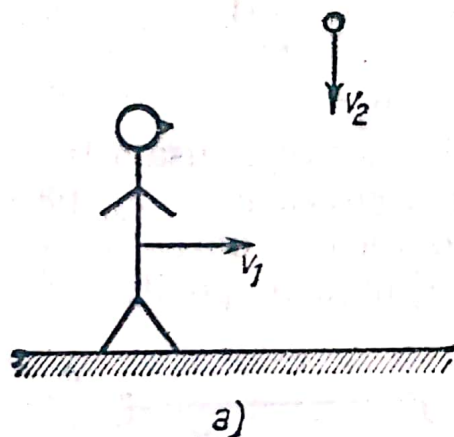


Fig. E 3.10

E 3.11. Trei bărci se deplasează pe o apă liniștită, pe drumuri paralele, distanțele dintre ele fiind $a =$

$= 20$ m și $b = 6$ m. Barca A se deplasează cu viteza constantă v_1 , iar bărcile B și C se deplasează în sens contrar cu vitezele constante v_2 și v_3 .

Cunoscând vitezele $v_1 = 5$ m/s și $v_2 = 4$ m/s se cere viteza v_3 astfel încât bărcile să se afle în permanență în linie dreaptă (fig. E 3.11, a). ([11] nr. 1.28)

Rezolvare. Procedînd conform programului metodei mișcării inverse dăm întregului sistem o mișcare de translație cu o viteză egală și de sens contrar cu viteza uneia dintre bărci, spre exemplu cu viteza bărcii B (fig. E 3.11, b).

Cititorul se poate convinge că este indiferent pe care dintre mișcările inverse o alegem, rezolvînd problema în celelalte două variante.

În această situație barca B rămîne pe loc, deoarece capătă viteza $v_2 - v_2 = 0$, iar celelalte două bărci capătă vitezele:

- barca A $v_1 - v_2$;
- barca C $v_3 - v_2$, presupusă a fi orientată în sensul inițial al lui v_3 în ipoteza $v_3 > v_2$, pe care o admitem.

După un timp oarecare t barca A va ajunge în poziția A' , barca C va ajunge în poziția C' , iar barca B va

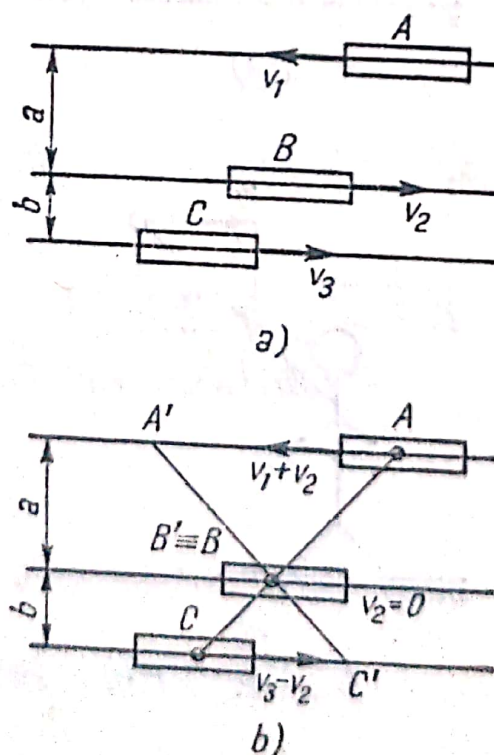


Fig. E 3.11

rămîne pe loc ($B' = B$), parcurgînd respectiv spațiile

$$AA' = (v_1 + v_2)t, \quad BB' = 0, \quad CC' = (v_3 - v_2)t.$$

Observînd asemănarea triunghiurilor BAA' și BCC' putem scrie

$$\frac{AA'}{CC'} = \frac{a}{b} = \frac{(v_1 + v_2)t}{(v_3 - v_2)t} = \frac{v_1 + v_2}{v_3 - v_2}.$$

Din cel de al doilea raport și din ultimul rezultă valoarea vitezei v_3

$$v_3 = \frac{bv_1 + (a + b)v_2}{a} = \frac{6 \times 5 + 4 \times 26}{20} = 6,7 \text{ m/s.}$$

3.4. Metoda ecuației fundamentale a dinamicii

3.4.1. Principiul metodei; domeniu de aplicabilitate.

Rezolvarea problemelor de dinamică folosind metoda ecuației fundamentale a dinamicii are la bază două ecuații scalare, obținute prin proiectarea acestei relații vectoriale pe axele unui sistem ales arbitrar pentru poziția considerată.

Din acest sistem de ecuații se pot determina numai două necunoscute; folosind relațiile din cinematică se mai pot determina și alte necunoscute cerute în problema respectivă.

Unele din necunoscutele din aceste două ecuații mai pot fi determinate uneori chiar mai simplu — și cu ajutorul altor metode; în probleme s-a făcut mențiunea corespunzătoare atunci cînd s-au ivit asemenea situații.

Metoda ecuației fundamentale a dinamicii ($m\bar{a} = \bar{F}$) este o metodă *monopozitională*, adică o metodă ce se aplică într-o singură poziție a corpului considerat; această poziție poate fi o poziție particulară (la pornire, cînd trece printr-o poziție dată, într-o poziție în care se află pentru un moment în repaus etc.) sau o poziție oarecare din timpul mișcării. Este bine să se scrie ecuația $m\bar{a} = \bar{F}$ pentru poziția oarecare, urmînd ca rezultatele pentru orice altă poziție să se obțină prin particularizarea celor din poziția oarecare.

3.4.2. *Noțiuni de bază; definiții; notații; relații.* Mărimile folosite la această metodă sînt:

- masa corpului aflat în mișcare (m);
- vectorul accelerație al corpului ($\vec{a}$), avînd proiecțiile a_x și a_y pe axele unui sistem de referință xOy ;
- vectorul rezultantă a forțelor care acționează corpul ($\vec{F}$), avînd proiecțiile pe axele unui sistem de referință F_x și F_y egale cu sumele proiecțiilor vectorilor componenți pe aceleași axe.

3.4.3. *Ecuațiile metodei. Legea fundamentală a dinamicii sub formă vectorială este*

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

în care m este masa corpului, $\vec{a}$ — accelerația totală care i s-a imprimat corpului, $\vec{F}$ — rezultanta tuturor forțelor care acționează asupra corpului.

Legea fundamentală a dinamicii în proiecții pe axele unui sistem cartezian de axe xOy este

$$ma_x = F_x \quad (3.5)$$

$$ma_y = F_y$$

în care m este masa corpului, a_x și a_y suma proiecțiilor pe axele Ox și respectiv Oy accelerației totale imprimate corpului

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

F_x și F_y — suma proiecțiilor pe aceleași axe ale tuturor forțelor care acționează asupra corpului.

Legea fundamentală a dinamicii în proiecții pe axele unui sistem alcătuit din tangenta Mt (orientată în sensul mișcării) și normala Mn (orientată către centru), în cazul mișcării circulare, este

$$ma_t = F_t \quad (3.6)$$

$$ma_n = F_n$$

în care m este masa punctului, a_t și a_n — proiecțiile

pe axele Mt și respectiv Mn ale accelerației imprimate corpului

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = R\varepsilon$$

$$a_n = \frac{1}{R} \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 = v\omega,$$

F_t și F_n — suma proiecțiilor pe aceleași axe ale tuturor forțelor care acționează asupra corpului.

3.4.4. *Programul metodei.* Operațiile acestui program sînt arătate în figura 3.6; ele sînt:

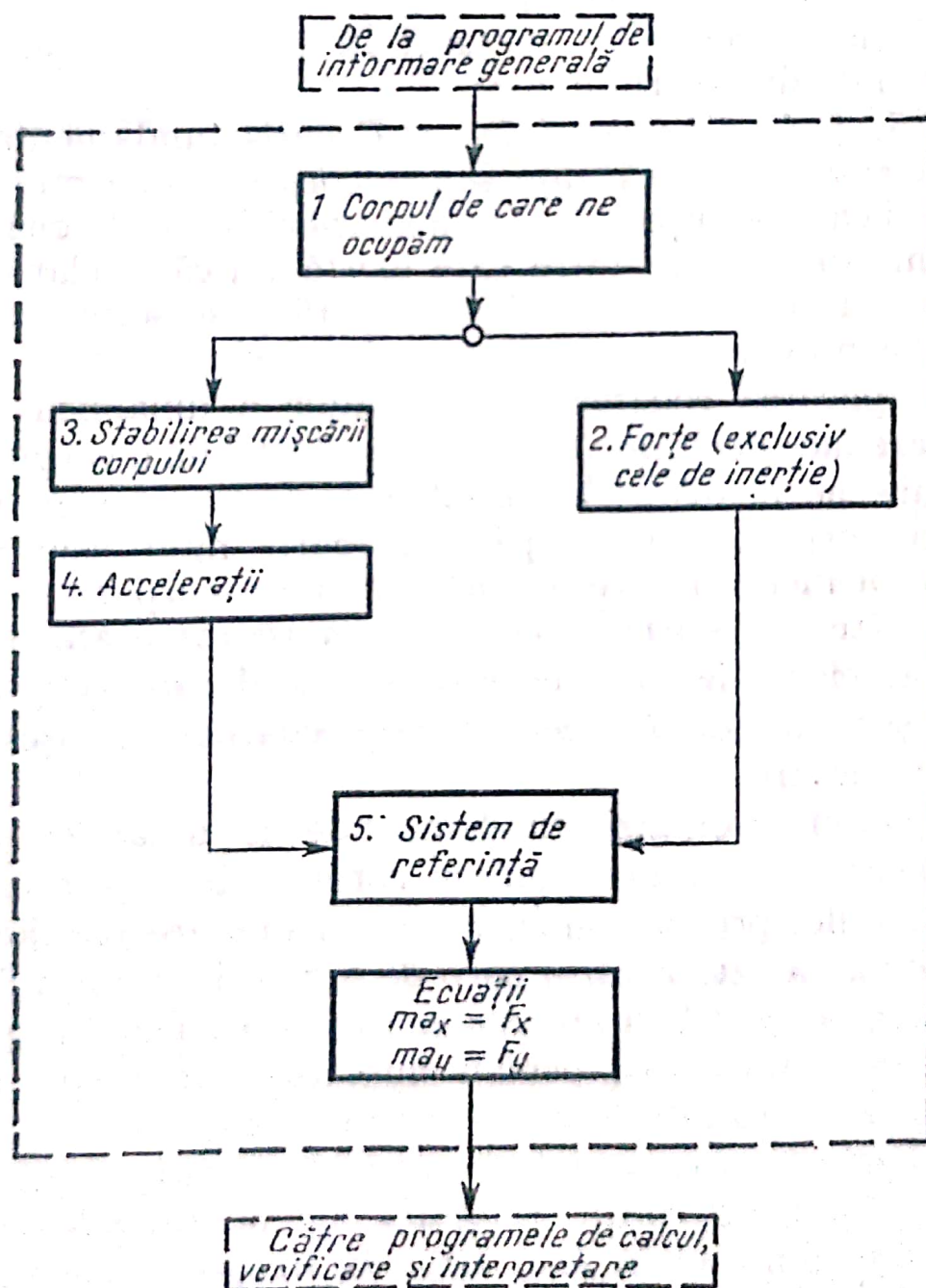


Fig. 3.6

a) precizarea corpului de a cărui mișcare ne ocupăm;

b) reprezentarea tuturor forțelor care acționează asupra corpului de care ne ocupăm (acțiunile corpurilor înconjurătoare);

c) stabilirea mișcării corpului de care ne ocupăm;

d) reprezentarea accelerației sau accelerațiilor la care este supus corpul de care ne ocupăm, în timpul mișcării;

e) alegerea sistemului de referință la care se raportează mișcarea corpului;

f) scrierea ecuațiilor metodei în proiecții pe axele sistemului de referință ales.

3.4.5. *Indicații și precizări.* a) Ecuația fundamentală a dinamicii se aplică unui singur corp sau mai multor corpuri care se mișcă odată; nu se aplică această ecuație mai multor corpuri între care există mișcări relative; în acest ultim caz corpurile se separă și se scriu ecuațiile de mișcare pentru fiecare dintre ele.

b) Aplicarea ecuației fundamentale a dinamicii nu se poate face decât după precizarea prealabilă a corpului de care ne ocupăm. În problemele în care avem un singur corp, această etapă este foarte mult ușurată. În problemele în care avem mai multe corpuri ce se mișcă, trebuie separate corpurile și reprezentate mai întâi accelerațiile la care este supus fiecare corp în parte și numai după aceea aplicate ecuațiile de mișcare pentru fiecare.

c) Metoda ecuației fundamentale a dinamicii se aplică unuia sau mai multor corpuri de dimensiuni reduse (bile, prisme, mici), aflate în mișcare rectilinie sau circulară sau oricărui corp de dimensiuni obișnuite când acesta se află în *mișcare de translație*. Pentru mișcarea de rotație sau pentru mișcarea combinată de translație cu rotație se aplică alte metode.

d) Forțele care se iau în considerație la această metodă sînt: greutatea, reacțiuni ale suprafețelor de rezemare, tensiuni în fire, forțe de frecare, forțe provenind din atracții, arcuri sau fire elastice, forțe arhi-

medice, forțe provenind din presiunea gazelor sau lichidelor.

Forța centrifugă sau o altă forță de inerție nu se ia în considerație la această metodă.

e) Sistemul de axe trebuie astfel ales încât să ușureze cât mai mult calculele. Se demonstrează că rezultatele sînt invariante față de alegerea sistemului de axe; după cum se poate observa, însă, deși se obțin aceleași rezultate, ecuațiile se complică sau se simplifică odată cu schimbarea sistemului de axe.

f) Atragem atenția asupra faptului că $\vec{a}$ reprezintă accelerația absolută a corpului, adică accelerația acestuia față de un sistem de referință fix. Dacă el este supus la mai multe accelerații date față de corpuri mobile, atunci ecuațiile acestei metode se scriu

$$m \sum a_x = \sum F_x$$

$$m \sum a_y = \sum F_y.$$

3.4.6. Exemple de aplicare a metodei

E 3.12. Un pendul conic este alcătuit dintr-un fir de lungime l prins la o extremitate de punctul fix O și avînd la cealaltă extremitate o bilă M de masă m . În timpul mișcării bila descrie un cerc într-un plan orizontal astfel încît firul face cu verticala unghiul α (fig. E 3.12, a).

Se dau: l , m , α . Se cer:

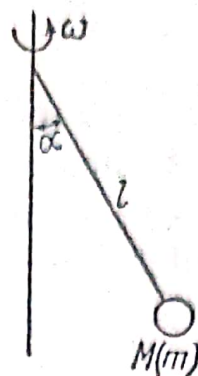
- viteza unghiulară ω din mișcarea bilei pe cerc;
- tensiunea T din firul de prindere [7].

Rezolvare (fig. E 3.12, b). Corpul de care ne ocupăm: bila M așezată într-o poziție oarecare.

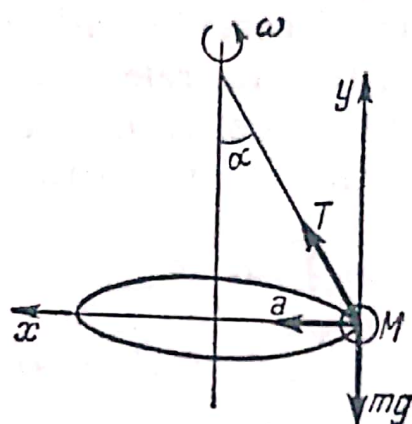
Forțele care acționează bila: mg și T .

Accelerația bilei M : $a = R\omega^2 = l\omega^2 \sin \alpha$ (bila descrie o mișcare circulară uniformă, deci există numai accelerația normală; accelerația tangențială este nulă).

Sistemul de axe ales: xMy (Mx — orizontală, My — verticală).



a)



b)

Fig. E 3.12

Proiecțiile forțelor și accelerației pe axele sistemului ales sînt:

Axa a, F	Mx	My
a	$l\omega^2 \sin \alpha$	0
mg	0	$-mg$
T	$T \sin \alpha$	$T \cos \alpha$

Ecuatiile de mișcare sînt [v. (3.5)].

$$ml\omega^2 \sin \alpha = 0 + T \sin \alpha$$

$$m \cdot 0 = -mg + T \cos \alpha.$$

Rezultate:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}}, \quad T = \frac{mg}{\cos \alpha}.$$

Interpretarea rezultatelor: pentru ca ω să fie real, trebuie ca $\cos \alpha \geq 0$, adică $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, condiție îndeplinită în problemă.

E 3.13. De un punct al tavanului unui tramvai se suspendă, prin intermediul unui fir de lungime l , o bilă M de masă m .

În momentul în care vatmanul începe să frâneze vagonul de tramvai, cu accelerația constantă a , se constată că firul se înclină în sensul de mers al tramvaiului cu unghiul α în raport cu verticala, stabilindu-se în această poziție pe toată perioada frînării (fig. E 3.13,a)

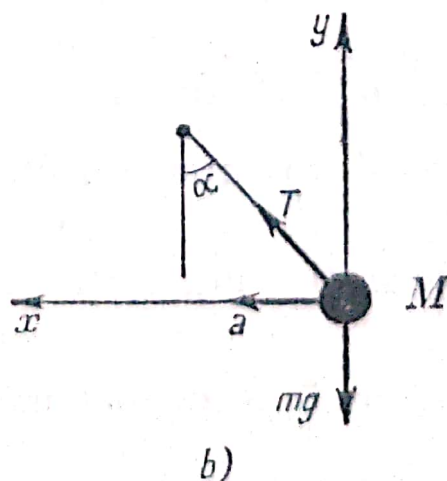
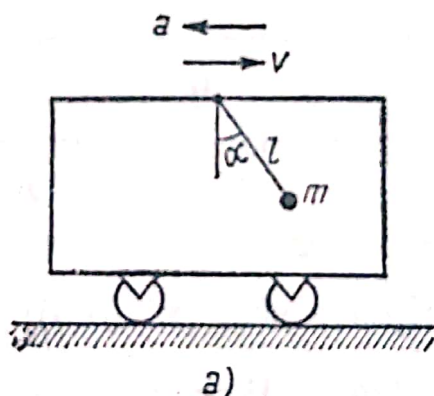


Fig. E 3.13

Se cer:

- accelerația a de frînare a tramvaiului;
- tensiunea T din firul de prindere.

Rezolvare (fig. E 3.13, b). Corpul de care ne ocupăm: bila M așezată în poziție oarecare în timpul mișcării vagonului.

Forțele care acționează bila M : mg și T .

Accelerația a (bila descrie o mișcare rectilie uniform întârziată).

Sistemul de axe ales: xMy (Mx — orizontală, My — verticală).

Proiecțiile forțelor și accelerației pe axele sistemului ales:

$\begin{array}{c} \text{Axa} \\ a, F \end{array}$	Mx	My
a	a	0
mg	0	$-mg$
T	$T \sin \alpha$	$T \cos \alpha$

Ecuatiile de mișcare sînt [v. (3.5)]

$$ma = 0 + T \sin \alpha$$

$$m \cdot a = T \cos \alpha - mg.$$

Rezultate:

$$a = g \operatorname{tg} \alpha; \quad T = \frac{mg}{\cos \alpha}.$$

Interpretarea și discuția rezultatelor:

— pentru $\alpha = 45^\circ$, $\operatorname{tg} \alpha = 1$, $a = g$; vatmanul frînează cu accelerația gravitației; pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $a \rightarrow +\infty$;

— tensiunea din fir este mai mare decît greutatea bilei.

E 3.14. Un corp este aruncat pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală, cu viteza v_0 orientată

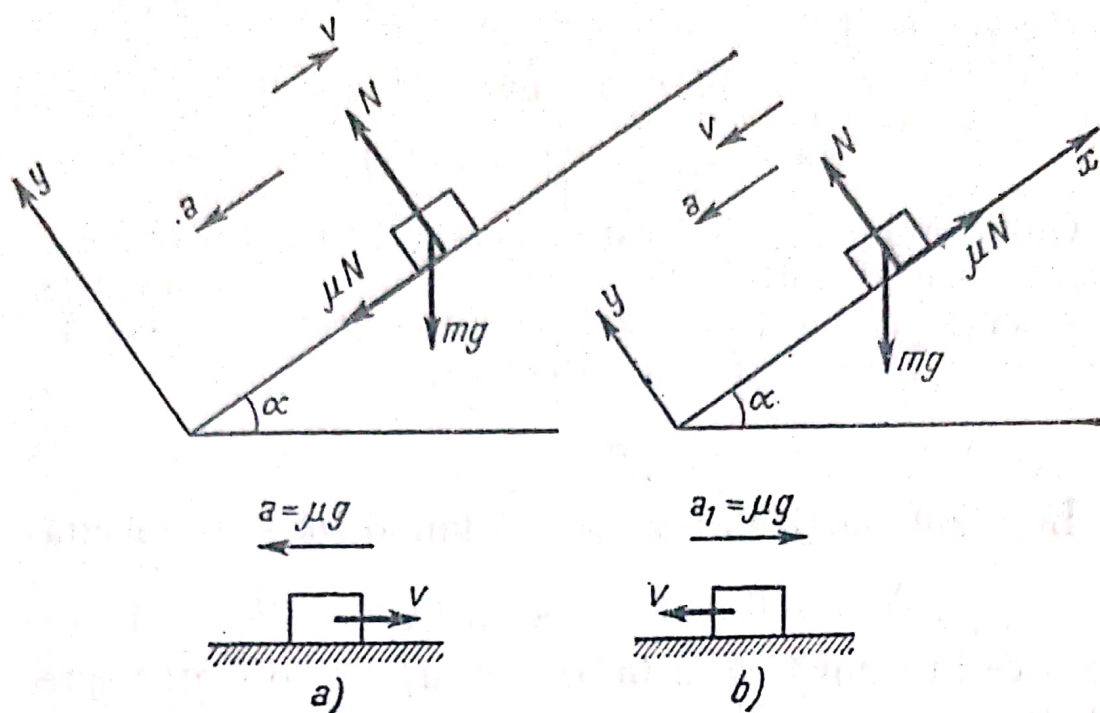


Fig. E 3.14

în susul planului. Cunoșcînd faptul că între plan și corp există frecare, de coeficient μ , se cere să se determine accelerația în mișcare ascendentă a corpului. Dar în mișcarea descendentă?

Rezolvare. Corpul de care ne ocupăm este corpul care se mișcă, pe planul înclinat așezat într-o poziție oarecare în timpul mișcării sale și acționat de forțele din fig. E 3.14, a.

Deoarece știm că mișcarea corpului este întârziată vom presupune de la început că accelerația corpului (a) este orientată invers mișcării sale (înspre josul planului). Dacă vom presupune că ea este orientată înspre susul planului rezultatul obținut va fi negativ.

Alegem un sistem de axe alcătuit din linia de cea mai mare pantă a planului înclinat și o perpendiculară pe ea.

Ecuatiile de mișcare sînt [v. (3.5)]

$$m(-a) = -\mu N - mg \sin \alpha$$

$$0 = N - mg \cos \alpha$$

din care rezultă

$$N = mg \cos \alpha$$

$$a = g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Observînd că în mișcarea descendentă se schimbă numai sensul forței de frecare și refăcînd calculele (a orientat în josul planului păstrînd același sistem de referință) rezultă (fig. E 3.14, b)

$$N = mg \cos \alpha, \quad a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

În cazul particular $\alpha = 0$ (plan orizontal) rezultă

$$N = mg, \quad a = \mu g; \quad a_1 = -\mu g$$

ceea ce înseamnă că la întoarcere a_1 este orientat spre dreapta.

În cazul particular $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (plan vertical)

$$N = 0, \quad a_1 = a = g.$$

E 3.15. Corpurile de mase m_1 și $m_2 = \varphi m_1$ ($\varphi > 1$) le așezăm conform fig. E 3.15, a și determinăm timpul necesar t_1 ca masa m_2 să atingă solul. Inversăm pozițiile celor două corpuri și observăm că, în acest caz,

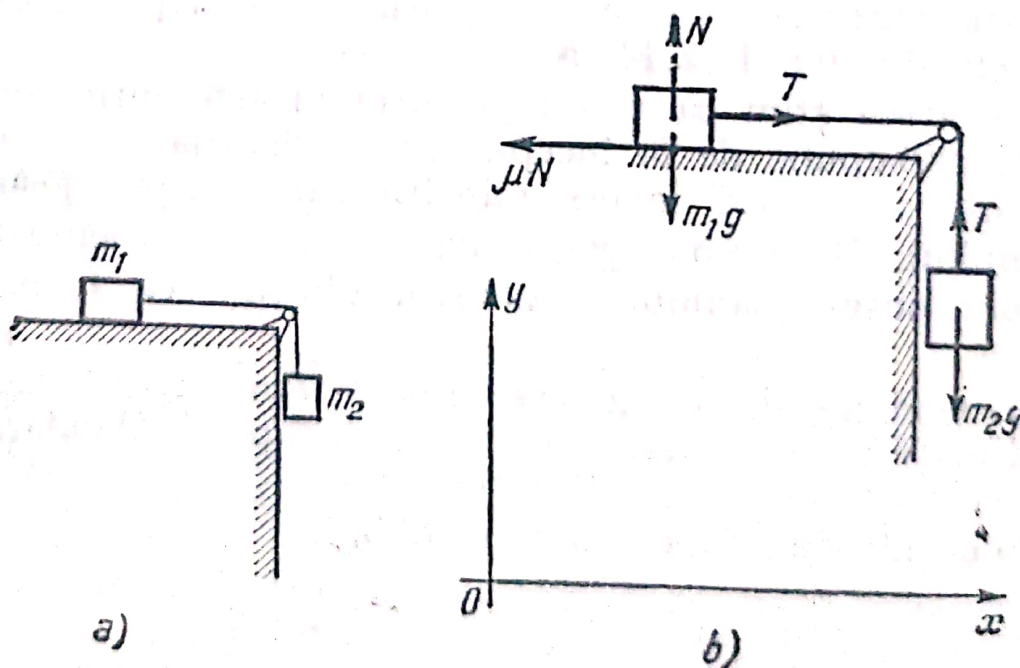


Fig. E 3.15

timpul necesar ca masa m_1 să atingă solul este $t_2 = t_1 \sqrt{\lambda}$, unde λ este un număr dat.

Se cere să se determine valoarea coeficientului de frecare μ .

Aplicație: $\varphi = 2$, $\lambda = 4$. [15,5/64].

Înainte de începerea rezolvării avem de făcut următoarele observații:

Din enunțul problemei lipsesc câteva precizări utile, pentru înlăturarea anumitor dubii în timpul rezolvării și anume:

— sistemul alcătuit din cele două corpuri și firul care le leagă își începe în ambele cazuri mișcarea din repaus;

— fiecare din cele două corpuri care atîrnă de porțiunea de fir așezată în poziție verticală se află inițial la aceeași distanță s de planul orizontal;

— între fiecare dintre cele două corpuri și planul orizontal pe care se reazemă există același coeficient de frecare μ , coeficient a cărui valoare se cere a fi determinată.

Notățiile literale au fost introduse de noi.

Rezolvare. Luînd în considerare toate cele de mai sus, problema se rezolvă folosind metoda $m\vec{a} = \vec{F}$, aplicată fiecărui corp în parte, după cum urmează (fig. E 3.15, b);

— pentru prima poziție (m_1 așezat pe planul orizontal, m_2 atîrnînd vertical, s-a ales același sistem de referință pentru ambele corpuri) avem:

corpul de masă m_1

$$(m_1 a_{1x} = \sum F_x) \quad m_1 a_1 = T - \mu N$$

$$(m_1 a_{1y} = \sum F_y) \quad 0 = N - m_1 g;$$

corpul de masă m_2

$$(m_2 a_{2y} = \sum F_y) \quad m_2 a_1 - m_2 g = T.$$

Eliminînd pe N și T care nu sînt cerute, adică determinînd valorile lor din ultimele două ecuații și introducîndu-le în prima ecuație, rezultă

$$a_1 = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g.$$

Înlocuind valoarea $m_2 = \varphi m_1$, dată de enunț și simplificând cu $m_1 (m_1 \neq 0)$, rezultă

$$a_1 = \frac{\varphi - \mu}{1 + \varphi} g; \quad (1)$$

— pentru cea de a doua poziție (m_2 așezat pe planul orizontal și m_1 atârând vertical) rezultă prin înlocuirea indicelui 1 cu 2 (sau eventual refăcând calculele în același mod ca mai sus) folosind și informația că μ este același

$$m_2 = \frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2} g$$

sau, ținând seama că $m_2 = \varphi m_1$,

$$a_2 = \frac{1 - \varphi\mu}{1 + \varphi} g. \quad (2)$$

Acestea sînt accelerațiile sistemului: corp de masă m_1 -fir-corp de masă m_2 , în cele două situații, menționate în enunțul problemei.

Folosind acum primele două precizări rezultă

$$s = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2.$$

Obținem

$$a_1 t_1^2 = a_2 t_2^2$$

sau

$$\frac{a_1}{a_2} = \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^2 = \lambda$$

ultima egalitate fiind scrisă în baza unei informații din textul problemei

$$t_2 = \sqrt{\lambda} t_1. \quad (3)$$

Înlocuind în această ultimă relație valorile lui a_1 și a_2 date de (1) și (2) obținem, după simplificare cu $1 + \varphi$,

$$\frac{\varphi - \mu}{1 - \varphi\mu} = \lambda$$

care constituie o ecuație de gradul întâi în necunoscuta μ cerută în problemă. Prin rezolvarea ei găsim

$$\mu = \frac{\varphi - \lambda}{1 - \lambda\varphi}.$$

Pentru valorile date în enunț rezultă

$$\mu = \frac{2 - 4}{1 - 4 \times 2} = \frac{2}{7} = 0,286.$$

Observație. În ceea ce privește valorile lui λ pentru ca problema să fie posibilă, un răspuns imediat se obține observând că în (3) λ se află sub radical și deci valorile

$$\lambda \leq 0$$

trebuie evitate. Nu sînt însă singurele; un alt interval ce trebuie evitat, dar ceva mai greu de observat, este acela care atribuie coeficientului de frecare valori negative. Din condiția $\mu > 0$ obținem deci

$$\frac{\varphi - \lambda}{1 - \lambda\varphi} > 0$$

sau

$$(\varphi - \lambda)(1 - \lambda\varphi) > 0$$

sau

$$\varphi\lambda^2 - \lambda(1 + \varphi^2) + \varphi > 0.$$

Pentru stabilirea semnului acestui trinom determinăm mai întâi rădăcinile sale

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 + \varphi^2 \pm \sqrt{(1 + \varphi^2)^2 - 4\varphi^2}}{2\varphi}$$

deci

$$\lambda_1 = \frac{1}{\varphi} \quad \text{și} \quad \lambda_2 = \varphi.$$

Inegalitatea în discuție este deci neîndeplinită pentru

$$\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$$

adică pentru

$$\frac{1}{\varphi} < \lambda < \varphi.$$

Pentru ca problema propusă să fie posibilă trebuie deci ca

$$\lambda \in (-\infty, 0] \cup \left(\frac{1}{\varphi}, \varphi\right)$$

cu observația că acest rezultat este valabil și în cazul $0 < \varphi < 1$, ocazie cu care extremitățile ultimului interval se inversează.

3.5. Metoda energiei

3.5.1. *Principiul metodei; domeniu de utilizare.* Metoda energiei este o metodă generală care conduce la o singură ecuație; ea este folosită în problemele de mecanică la determinarea unei singure mărimi scalare care apare explicit în expresia ei: masă, viteză, forță, distanță, coeficient de frecare. Ea nu poate fi folosită direct pentru aflarea acelor mărimi care nu apar explicit în expresia sa (timpul sau accelerația).

Metoda energiei este o metodă *bipozițională*, adică o metodă care se aplică luând în considerare două poziții ale corpului sau sistemului considerat, una denumită în mod convențional „poziție inițială” și cealaltă „poziție finală”, prima fiind anterioară celei de a doua.

Ea exprimă în esență faptul că variația energiei cinetice a corpului sau sistemului considerat se datorește lucrului mecanic al tuturor forțelor exterioare care au acționat corpul sau sistemul respectiv între poziția inițială și cea finală.

Metoda energiei se prezintă sub mai multe forme, care se aplică după caz, în funcție de datele și necunoscutele din problema respectivă.

3.5.2. *Noțiuni de bază; definiții; notații; relații.* În ecuațiile acestei metode apar următoarele mărimi:

E — energia cinetică a unui corp sau a unui sistem de corpuri la un moment dat; ea se calculează cu relațiile:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 \text{ pentru un singur corp;}$$

$$E = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \text{ pentru mai multe corpuri;}$$

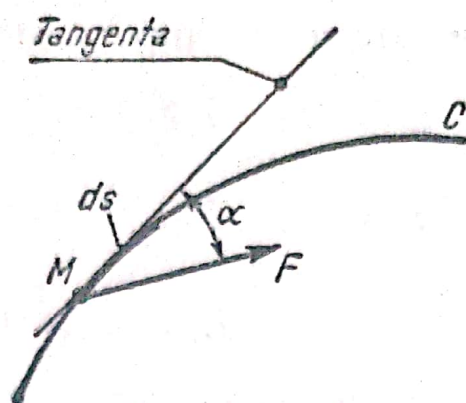


Fig. 3.7

dL — lucrul mecanic elementar efectuat de o forță variabilă, atît ca modul cît și ca orientare, atunci cînd punctul ei de aplicație M parcurge pe curba C arcul elementar ds (fig. 3.7).

Lucrul mecanic se calculează cu relația

$$dL = F ds \cos \alpha$$

în care α reprezintă unghiul dintre suportul forței F și arcul ds , respectiv tangenta în punctul M la curba C ;

L_{AB} — lucrul mecanic finit efectuat de o forță variabilă atît ca modul cît și ca orientare, atunci cînd punctul său de aplicație M parcurge pe curba C arcul finit $s = AB$; el se calculează cu relația

$$L_{AB} = \int_0^s F ds \cos \alpha. \quad (3.7)$$

În calcule sînt importante cîteva cazuri particulare ale acestei relații și anume:

a) Forța F constantă în modul și orientare (F și α constante), curba C o dreaptă (fig. 3.8, a); în acest caz rezultă

$$L_{AB} = \int_0^s F ds \cos \alpha = F \cos \alpha \int_0^s ds = Fs \cos \alpha \text{ cu}$$

următoarele trei subcazuri importante:

- 1°. $\alpha = 0; \quad L_{AB} = +Fs$
- 2°. $\alpha = \frac{\pi}{2}; \quad L_{AB} = 0$
- 3°. $\alpha = \pi; \quad L_{AB} = -Fs.$

(3.8)

b) Forța F variabilă ca modul, curba C — o dreaptă care constituie totodată și suportul forței $F(\alpha = 0)$; în acest caz rezultă (fig. 3.8, b)

$$L_{AB} = \int_0^s F ds \cos \alpha = \int_0^s F dx.$$

O asemenea situație se întâlnește spre exemplu în cazul arcului (k — constanta arcului) sau al forțelor de presiune la gaze:

— în primul caz avem $F = kx$ și deci

$$L_{AB} = \int_0^s kx dx = \frac{ks^2}{2} \quad (3.9)$$

sau dacă arcul este deja întins cu cantitatea s_1

$$L_{AB} = \int_{s_1}^{s_2} kx dx = \frac{k}{2} (s_2^2 - s_1^2);$$

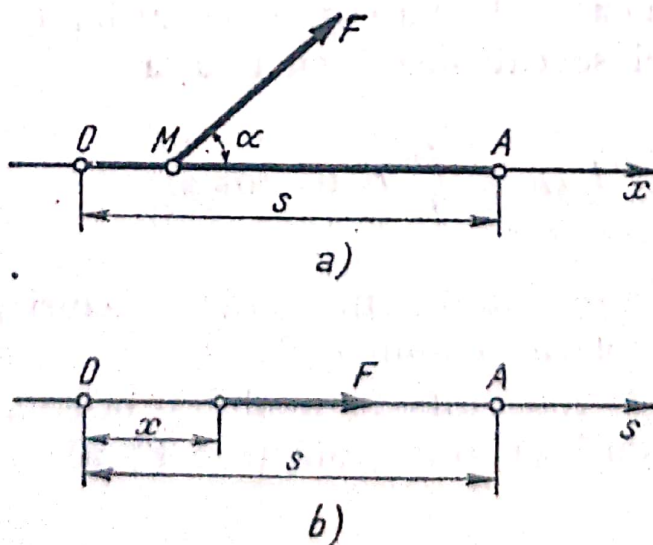


Fig. 3.8

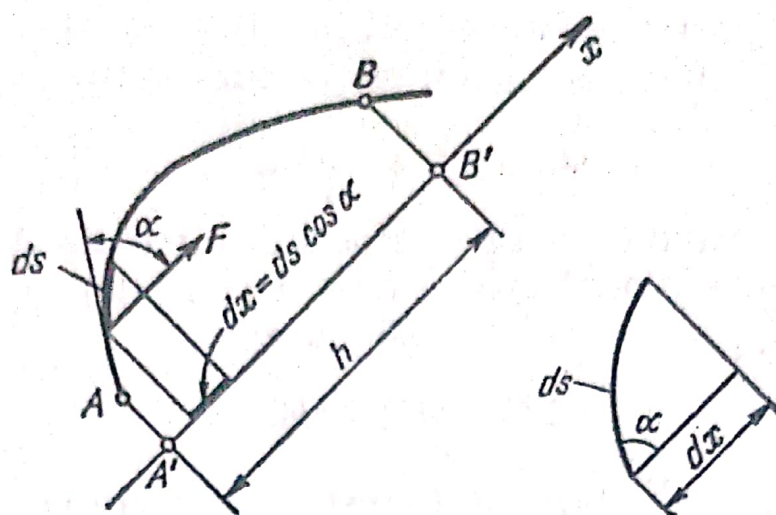


Fig. 3.9

— în cel de al doilea caz avem $F = pS$ (p — presiunea gazului, S = aria pistonului) și deci

$$L_{AB} = \int_0^s pS dx = \int_0^s p dv \quad (3.10)$$

deoarece $S dx = dv$ — volumul elementar al gazului.

c) Forța F constantă în modul și orientare, C — o curbă oarecare (fig. 3.9). În acest caz avem

$$L_{AB} = \int_0^s F ds \cos \alpha = F \int_0^s ds \cos \alpha.$$

Observînd însă că $ds \cos \alpha$ reprezintă proiecția arcului elementar al curbei C pe direcția fixă a forței F , care s-a ales drept axă Ox , se poate scrie

$$ds \cos \alpha = dx$$

și deci

$$L_{AB} = F \int_0^s ds \cos \alpha = F \int_0^h dx = Fh$$

unde $h = A'B'$ reprezintă distanța dintre proiecțiile A' și B' ale punctelor A și B pe direcția fixă a forței F .

Mai general se poate scrie

$$L_{AB} = \pm Fh$$

semnul plus corespunzînd deplasării în sensul forței și semnul minus deplasării în sens contrar.

Un caz particular al acestei relații îl constituie lucrul mecanic al forței gravitaționale (fig. 3.10)

$$L_{AB} = \pm mgh. \quad (3.11)$$

ΔE — variația energiei cinetice între două poziții notate convențional prin 0 (poziția inițială) și 1 (poziția finală); ea se calculează cu relația

$$\Delta E = E_1 - E_0$$

în care E_1 și E_0 reprezintă respectiv energiile cinetice ale sistemului material respectiv în pozițiile 1 și 0;

$\Delta \Pi$ — variația energiei potențiale a unui sistem material între două poziții notate la fel ca mai sus; ea este egală și de semn contrar cu lucrul mecanic al forțelor care au acționat asupra sistemului între acele poziții, adică

$$\Delta \Pi = -L_{01}.$$

În aplicații se folosesc următoarele cazuri particulare:

a) Variația energiei potențiale a unei greutate care își deplasează punctul de aplicație din A în B este

$$\Delta \Pi_{AB} = \pm mgh \quad (3.12)$$

semnul plus fiind folosit pentru cazul urcării (energia potențială crește, variația sa este pozitivă), iar semnul minus pentru cazul coborîrii (energia potențială scade, variația sa este negativă), adică invers decât la lucrul mecanic:

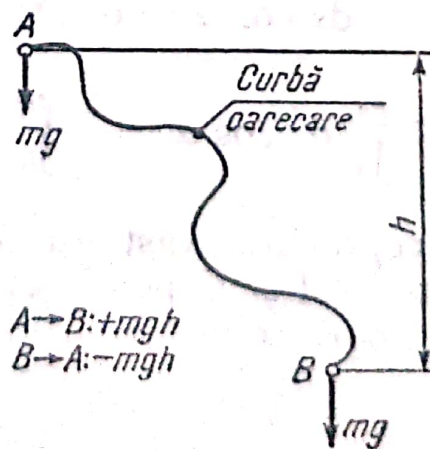


Fig. 3.10

b) variația energiei potențiale a unui arc din poziția liberă în poziția întins sau comprimat cu cantitatea s este totdeauna pozitivă (energia potențială crește atât la întindere cât și la comprimare), adică

$$\Delta\Pi = \frac{ks^2}{2} \quad (3.13)$$

k fiind constanta elastică a arcului, iar s deplasarea capătului liber. Este ușor de observat că energia potențială a arcului crește de asemenea dacă el este trecut din poziția „întins” în poziția „mai întins” sau din poziția „comprimat” în poziția „mai comprimat”.

Singurele cazuri în care energia potențială a arcului scade sînt acelea în care el este trecut din poziția „întins” în poziția „mai puțin întins”, sau din poziția „comprimat” în poziția „mai puțin comprimat” și de la „comprimat” la „mai puțin întins”.

În fine, energia potențială a unui arc nu variază ($\Delta\Pi = 0$) dacă aceasta trece din poziția „întins” în poziția „la fel de comprimat” sau invers.

3.5.3. Ecuațiile metodei. Metoda energiei cinetice se aplică sub mai multe forme pe care le vom prezenta în cele ce urmează împreună cu domeniul lor de aplicabilitate.

Prima formă este reprezentată de relația

$$\Delta E = L_t \quad (3.14)$$

în care ΔE reprezintă variația energiei cinetice a sistemului între două poziții ale sale denumite convențional *inițială* și *finală*, iar L_t — lucrul mecanic total (suma lucrurilor mecanice ale tuturor forțelor care acționează sistemul) între pozițiile inițială și finală.

Aceasta reprezintă forma cea mai generală a metodei energiei cinetice: ea este aplicabilă fără restricții în orice problemă de dinamică.

A doua formă este

$$\Delta E + \Delta\Pi = L \quad (3.15)$$

în care ΔE reprezintă variația energiei cinetice a sistemului între două poziții ale sale denumite convențional *inițială* și *finală*, $\Delta\Pi$ — variația energiei potențiale a

sistemului între aceleași două poziții, iar L — lucrul mecanic al acelor forțe ce acționează asupra sistemului care n-au apărut în expresia lui $\Delta\Pi$.

Forma a treia este dată de relația

$$\Delta E + \Delta\Pi = 0. \quad (3.16)$$

Ea reprezintă un caz particular al formei precedente: se aplică în aceleași condiții la sistemele fără frecări. Ea este cunoscută sub denumirea de *metoda conservării energiei mecanice*.

Forma a patra este dată de relația

$$dE = dL_t \quad (3.17)$$

în care dE reprezintă variația energiei cinetice a sistemului între două poziții infinit apropiate și se calculează cu relațiile

$$dE = mv \, dv \quad \text{pentru un singur corp}$$

$$dE = \sum m_i v_i \, dv_i \quad \text{pentru mai multe corpuri,}$$

iar dL_t reprezintă lucrul mecanic elementar efectuat de toate forțele care acționează asupra sistemului (greutăți, forțe elastice, frecări ș.a.) între aceleași două poziții infinit apropiate. Acesta se calculează cu relația

$$dL_t = \sum F_i \, ds_i \cos \alpha_i.$$

Această formă a metodei energiei se folosește în cazurile în care nu se poate efectua integrala lucrului mecanic; ea se reduce la o ecuație diferențială, din a cărei integrare rezultă expresia vitezei mobilului.

3.5.4. Programul metodei. Prima formă. Operațiile acestui program sînt arătate în fig. 3.11; ele sînt:

a) precizarea sistemului material de care ne ocupăm: unul sau mai multe corpuri din problema respectivă;

b) reprezentarea a trei poziții ocupate de sistemul material considerat și anume: poziția inițială, o poziție oarecare situată între poziția inițială și cea finală, poziția finală;

c) reprezentarea mărimilor fizice care apar în ecuația acestei metode și anume:

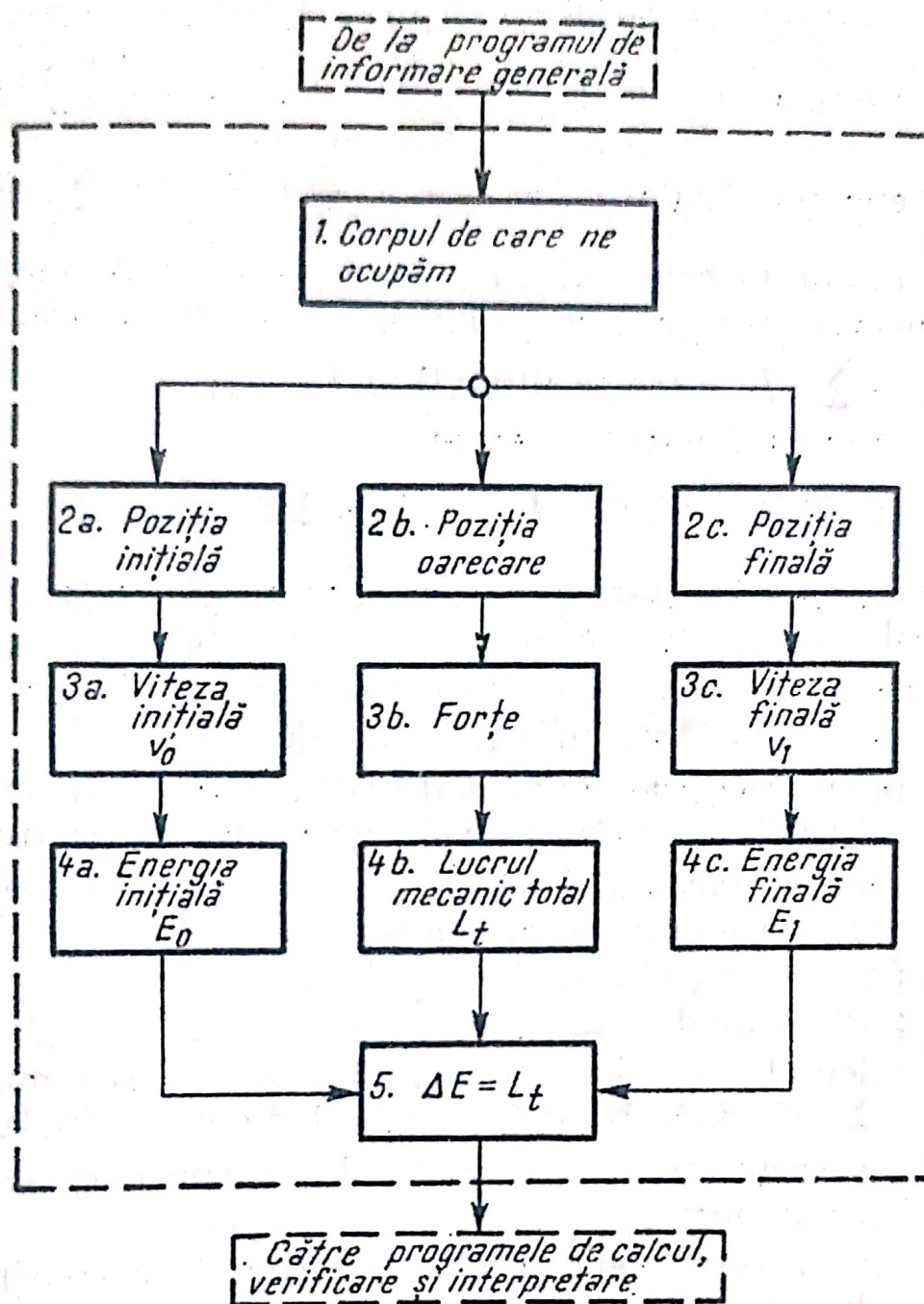


Fig. 3.11

— viteza sau vitezele inițiale ale corpurilor sistemului material considerat reprezentate pe poziția inițială 0 a sistemului;

— forțele exterioare care acționează corpurile sistemului reprezentate pe poziția oarecare;

— viteza sau vitezele finale ale corpurilor sistemului material considerat, reprezentate pe poziția finală 1 a sistemului;

- d) calculul termenilor ce apar în ecuația energiei:
- energia inițială $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$ sau $E_0 = \frac{1}{2} \sum m_i v_{i0}^2$
 - energia finală $E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$ sau $E_1 = \frac{1}{2} \sum m_i v_{i1}^2$
 - lucrul mecanic al tuturor forțelor exterioare ce acționează asupra sistemului material considerat
- $$L_t = \sum L_i \text{ între pozițiile 0 și 1;}$$
- e) scrierea ecuației energiei

$$\Delta E = E_1 - E_0 = L_t.$$

Calcululele ulterioare se desfășoară conform programelor de calcul, verificare și interpretare.

A doua și a treia formă. Operațiile programului acestei metode sînt arătate în fig. 3.12; ele sînt:

- a) precizarea sistemului material de care ne ocupăm (unul sau mai multe corpuri din problema respectivă);
- b) reprezentarea a două poziții ocupate de sistemul material considerat și anume:
 - poziția inițială;
 - poziția finală.
- c) calculul variației energiei potențiale a sistemului $\Delta \Pi = \sum \Delta \Pi_i$ între poziția inițială 0 și poziția finală 1;
- d) reprezentarea vitezei (vitezelor corpurilor) sistemului și anume:
 - viteza (vitezele) inițială a corpului (corpurilor) sistemului material considerat, reprezentate pe poziția inițială a sistemului.
 - viteza (vitezele) finală a corpului (corpurilor) sistemului material considerat, reprezentate pe poziția finală a sistemului;
- e) calculul variației energiei cinetice totale a sistemului între pozițiile inițială și finală:
 - se calculează $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$ sau $E_0 = \frac{1}{2} \sum m_i v_{i0}^2$
 - se calculează $E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$ sau $E_1 = \frac{1}{2} \sum m_i v_{i1}^2$
 - se calculează variația energiei $\Delta E = E_1 - E_0$;

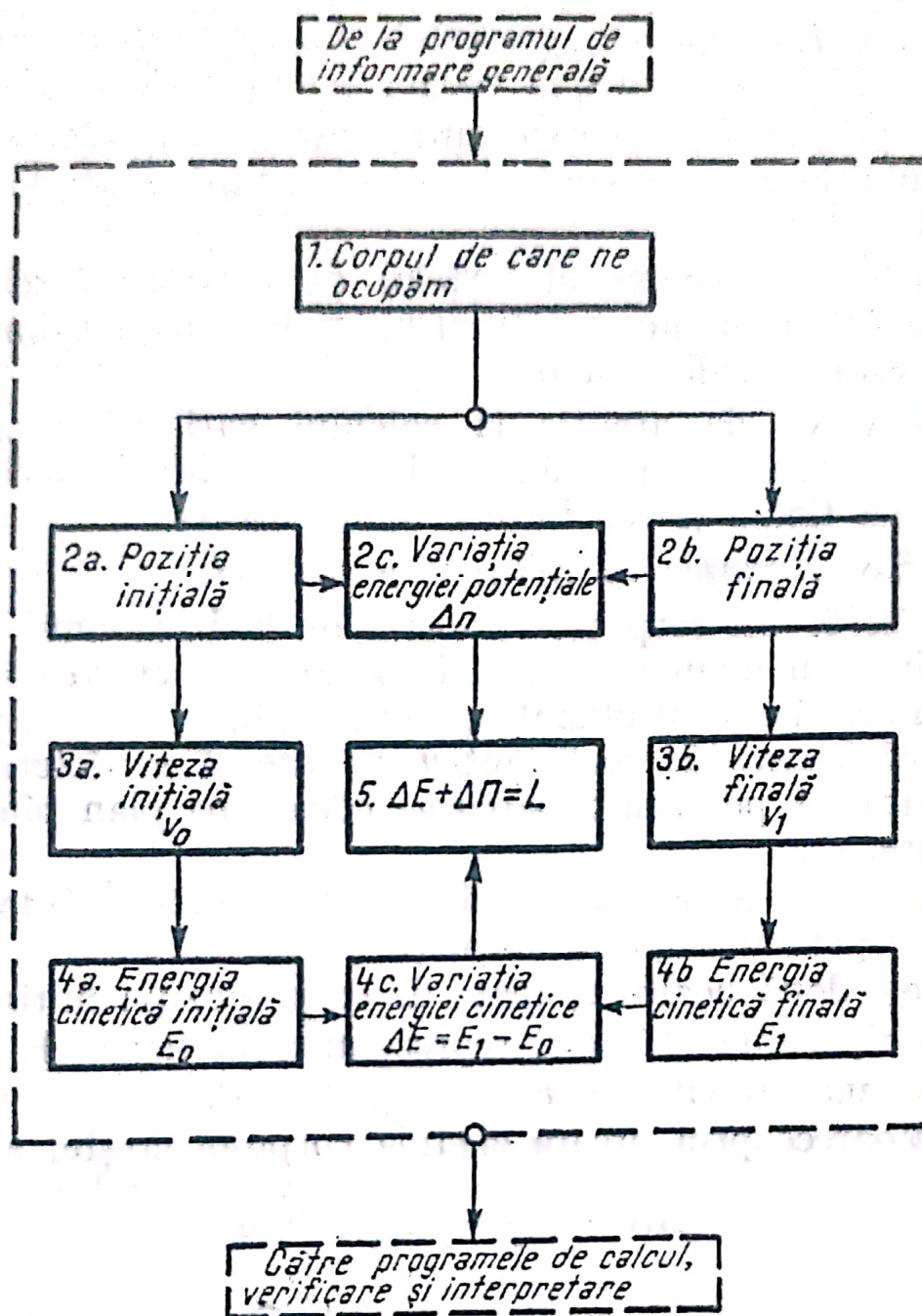


Fig. 3.12

f) scriem ecuația energiei:

$$\Delta E + \Delta \Pi = L$$

$$\Delta E + \Delta \Pi = 0.$$

Observație. Pentru prima ecuație se va calcula în prealabil lucrul mecanic L . Aplicarea formei a patra a metodei energiei va rezulta din exemplele ce se vor trata în continuare; pentru această formă nu am mai elaborat un program separat.

3.5.5. *Indicații și precizări.* La aplicarea acestei metode trebuie avute în vedere următoarele:

— printre forțele care sînt luate în considerare la calculul lucrului mecanic L_t nu se vor introduce forțele de inerție;

— lucrul mecanic al forțelor de legătură (exclusiv frecările) și anume: reacțiuni normale, tensiuni din fire ș.a. este întotdeauna nul;

— se va da atenție la calculul variației energiei cinetice care se exprimă întotdeauna ca diferența dintre energia finală și cea inițială și nu invers.

3.5.6. *Exemple de aplicare a metodei*

E 3.16. Un corp este aruncat de la baza unui plan înclinat cu unghiul α față de orizontală, cu viteza v_0 , orientată în susul planului; știind că între corp și plan există frecare de coeficient μ se cere să se determine distanța x pe care o parcurge corpul pe plan pînă la oprire.

Rezolvare. Se aplică metoda energiei sub forma (3.15) pentru corpul aruncat pe plan.

Cele două poziții ocupate de corp (poziția inițială 0 și poziția finală 1) sînt reprezentate în figura E 3.16 împreună cu vitezele $v_0 = v_0$ și $v_1 = 0$.

Deoarece prin urcare energia corpului crește, avem

$$\Delta\Pi = mgh = mgx \sin \alpha.$$

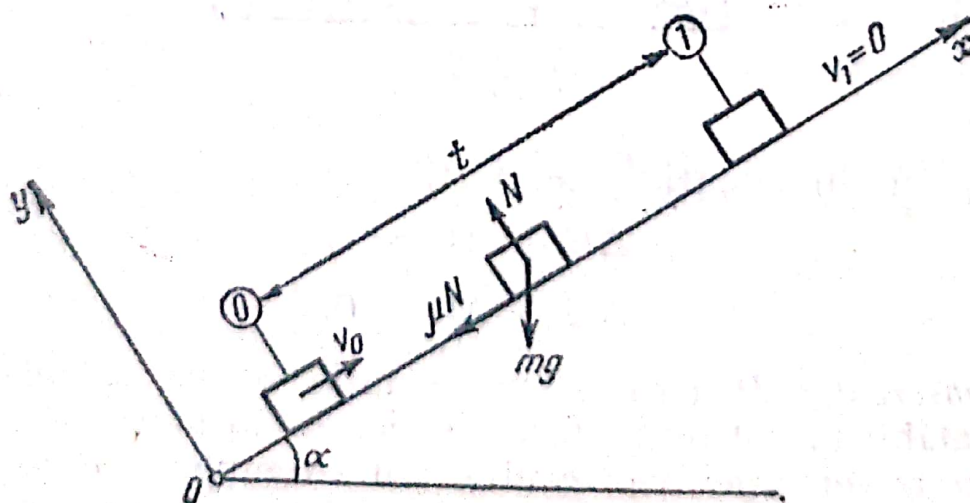


Fig. E 3.16

Variația energiei cinetice este

$$\begin{aligned}\Delta E = E_1 - E_0 &= \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \\ &= -\frac{1}{2} m v_0^2.\end{aligned}$$

Forța de frecare dintre corp și plan, orientată în josul planului, are expresia

$$F = \mu N = \mu mg \cos \alpha$$

Lucrul mecanic al acestor forțe între pozițiile inițială și finală are expresia

$$L_f = -\mu mg x \cos \alpha.$$

Înlocuind în (3.15) se obține

$$-\frac{1}{2} m v_0^2 + mg x \sin \alpha = -\mu mg x \cos \alpha$$

de unde rezultă

$$x = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}. \quad (1)$$

Cazuri particulare: $\alpha = 0, \mu \neq 0$ reprezentat de planul orizontal cu frecare

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu g}; \quad (2)$$

$\alpha = 0, \mu = 0$ (plan orizontal fără frecare)

$$x \rightarrow +\infty; \quad (3)$$

$\alpha = \frac{\pi}{2}, \mu \neq 0$ (plan vertical cu frecare)

$$x = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (4)$$

Se observă că rezultatul nu depinde de valoarea lui μ ; el este același ca și în cazul aruncării libere pe verticală.

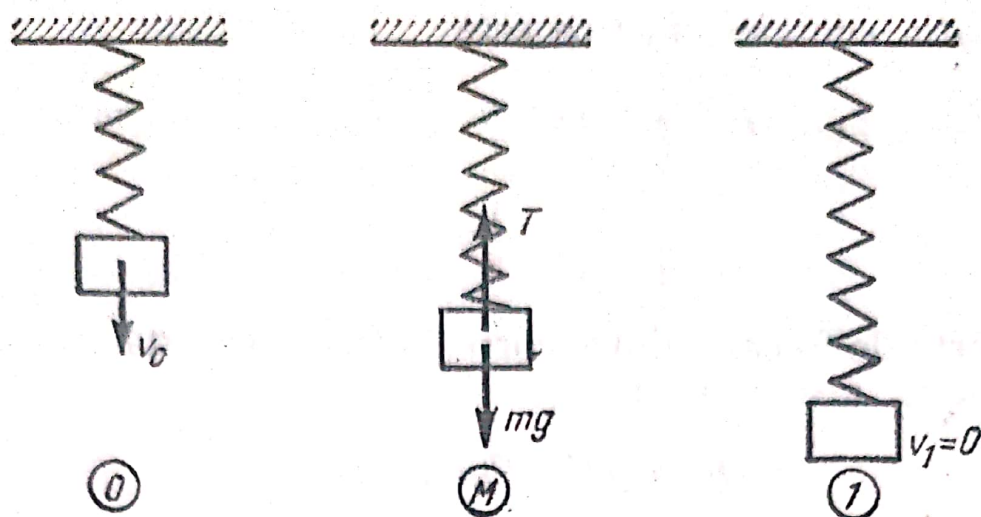


Fig. E 3.17

E 3.17. Se consideră un arc de constantă elastică k ; de care este atârnată în poziție verticală o masă m . În poziția de echilibru static se comunică masei o viteză v_0 orientată vertical în jos.

Se cere să se determine deplasarea maximă a masei m .

Rezolvare. Se aplică metoda energiei sub forma (3.14).

Corpul de care ne ocupăm este masa m ; el a fost reprezentat în trei poziții: inițială (0), finală (1) și oarecare (M).

În pozițiile inițială și finală s-au reprezentat vitezele (v_0 și $v_1 = 0$), iar în poziția oarecare forțele ce acționează asupra masei m (T și mg). Avem (fig. E. 3.17):

$E_1 = 0$ (corpul se oprește în poziția sa maximă)

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\Delta E = E_1 - E_0 = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

$$L_i = -\int_0^x T dx + mgx$$

în care tensiunea din arc are valoarea

$$T = T_0 + kx = mg + kx.$$

Rezultă

$$L_t = - \int_0^x (mgx + kx) dx + mgx = - mgx + \frac{kx^2}{2} + mgx = \frac{kx^2}{2}.$$

Se observă că din adunarea lucrurilor mecanice ale greutateii și tensiunii din arc s-a obținut același rezultat ca și când nu am lua în considerare greutatea și am considera totodată că arcul este neîntins în poziția inițială. Rezultă în final:

$$x = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

E 3.18. Un corp de masă m cade, fără viteză inițială, de la înălțimea h , peste un arc de constantă elastică k așezat în poziție verticală și avînd extremitatea de jos fixă.

Neglijînd frecările, se cere să se determine deformația x a arcului.

Rezolvare. Se aplică metoda energiei sub forma (3.16)

$$\Delta E + \Delta \Pi = 0$$

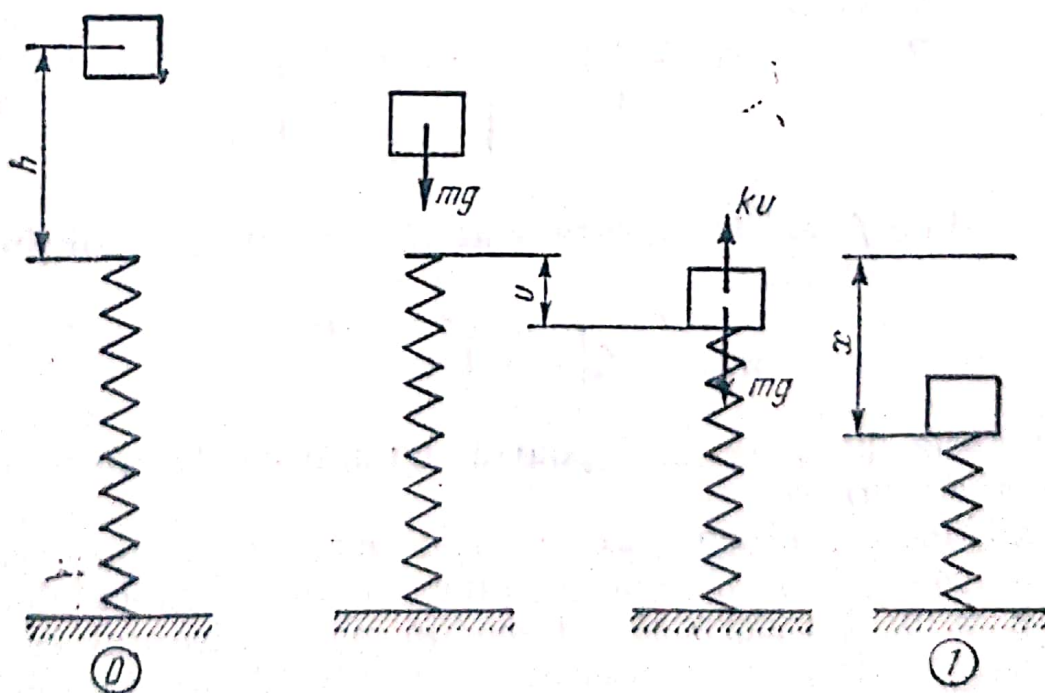


Fig. E 3.18

între poziția inițială 0 și cea finală 1 arătate în figura E 3.18. Rezultă

$$\Delta E = E_1 - E_0 = 0 - 0 = 0$$

deoarece atât în poziția inițială cât și în cea finală corpul are viteza nulă.

Variația energiei potențiale a greutateii mg este negativă, deoarece greutatea coboară pe distanța $h + x$

$$\Delta \Pi_1 = -mg(h + x).$$

Variația energiei potențiale a arcului este pozitivă

$$\Delta \Pi_2 = \frac{kx^2}{2}.$$

Rezultă ecuația

$$\frac{kx^2}{2} - mg(h + x) = 0$$

sau

$$kx^2 - 2mgx - 2mgh = 0$$

cu soluțiile

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2mghk}}{k} = \\ &= \frac{mg}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2h}{\frac{mg}{k}}} \right) \end{aligned}$$

Notînd cu $f_s = \frac{mg}{k}$ săgeata statică a arcului se obține

$$x_{1,2} = f_s \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2h}{f_s}} \right).$$

Expresia din paranteză poartă denumirea de *multiplier de impact*.

Evident, problema are soluție unică și anume cea care corespunde semnelui plus înaintea radicalului.

E 3.19. Un corp situat pe un plan orizontal este lansat cu viteza v_0 la una din extremitățile unui perete cilindric de rază R , avînd generatoarele verticale, solidar cu același plan orizontal pe care se află corpul.

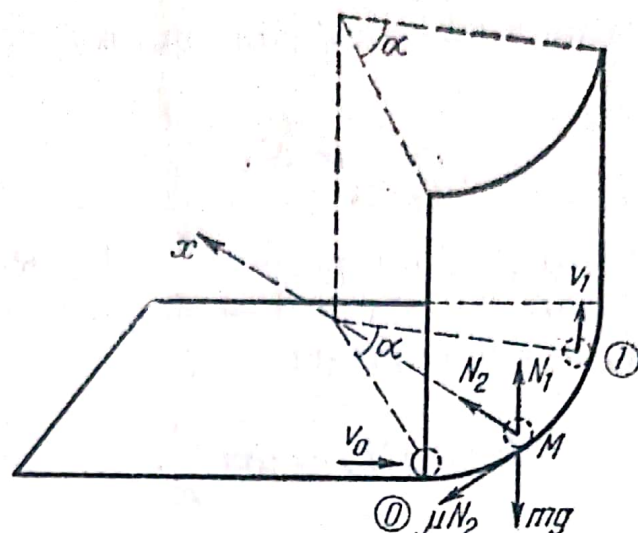


Fig. E 3.19

Între corp și planul orizontal nu există frecare, dar între corp și peretele cilindric există frecare de coeficient μ .

Cunoscând deschiderea unghiulară α a peretelui cilindric, se cere să se determine viteza v a corpului din spațiul semicilindrului.

Rezolvare. Corpul de care ne ocupăm este evident mobilul M . El a fost reprezentat în cele trei poziții: inițială (0), finală (1) și oarecare.

Pe pozițiile inițială și finală s-au reprezentat vitezele v_0 și v_1 tangente la cilindru, iar în poziția oarecare s-au reprezentat toate forțele care acționează asupra corpului și anume (fig. E 3.19):

- greutatea sa mg ,
- reacțiunea normală a planului orizontal N_1 ;
- reacțiunea normală a cilindrului N_2 ;
- forța de frecare de la contactul cu cilindrul μN_2 .

Dintre toate aceste patru forțe este ușor de observat că numai forța de frecare de la contactul cu cilindrul (μN_2) este cea care dă lucru mecanic, deoarece toate celelalte forțe se deplasează perpendicular pe traiectoria mobilului M .

Pentru aflarea valorii lui N_2 se aplică mai întâi ecuația $m\bar{a} = \bar{F}$, proiectînd-o pe raza Mx . Cunoscînd faptul că accelerația normală a mobilului M are expresia

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

și că accelerația tangențială nu dă proiecție pe Mx , rezultă

$$m \frac{v^2}{R} = N_2$$

toate celelalte forțe dînd proiecții nule. Rezultă deci că forța de frecare cu cilindrul — singura care produce lucru mecanic — are expresia

$$F = \mu N_2 = \mu m \frac{v^2}{R}.$$

Încercînd să calculăm lucrul mecanic al acestei forțe

$$L = - \int \mu m \frac{v^2}{R} ds = - \mu \frac{m}{R} \int v^2 ds$$

în care ds este elementul de arc al cercului de contact dintre semicilindru și planul orizontal, observăm că aceasta nu este posibil, deoarece nu cunoaștem legea de variație a vitezei în timpul mișcării mobilului. Ajungem deci la concluzia că trebuie să aplicăm metoda energiei sub forma (3.17); rezultă

$$mvdv = - \frac{\mu m}{R} v^2 ds$$

sau după simplificări

$$\frac{dv}{v} = - \frac{\mu}{R} ds,$$

ecuație diferențială care prin integrare conduce la

$$Lv = - \frac{\mu}{R} s + C$$

unde C este o constantă de integrare ce urmează să fie determinată.

Din enunțul problemei rezultă următoarele condiții la limite:

- pentru $s = 0$, $v = v_0$ (la intrare),
- pentru $s = R$, $v = v_1$ (la ieșire).

Înlocuind în soluția ecuației, obținem

$$Lv_0 = C$$

$$Lv_1 = -\frac{\mu}{R} R\alpha + C = -\mu\alpha + C$$

adică

$$Lv_1 = -\mu\alpha + Lv_0$$

sau

$$L \frac{v_1}{v_0} = -\mu\alpha$$

de unde rezultă

$$v_1 = v_0 e^{-\mu\alpha}.$$

Acest exemplu constituie un model de aplicare a formei a patra a metodei energiei.

E 3.20. Cu ce viteză trebuie azvirlit pe o rază un corp de pe Pământ, astfel încît el să nu mai revină în punctul de plecare? ($R = 6\,370\text{ km}$, $g = 9,81\text{ m/s}^2$).

Rezolvare. Se aplică metoda energiei sub forma I-a

$$\Delta E = L_t \quad (1)$$

pentru corpul aruncat în direcția razei.

Cele trei poziții ocupate de corp, poziția inițială (0), finală (1) și oarecare (M) sînt reprezentate pe figura E 3.20. Vitezele sînt: în poziția inițială v_0 (necunoscută) și în poziția finală $v_\infty = 0$.

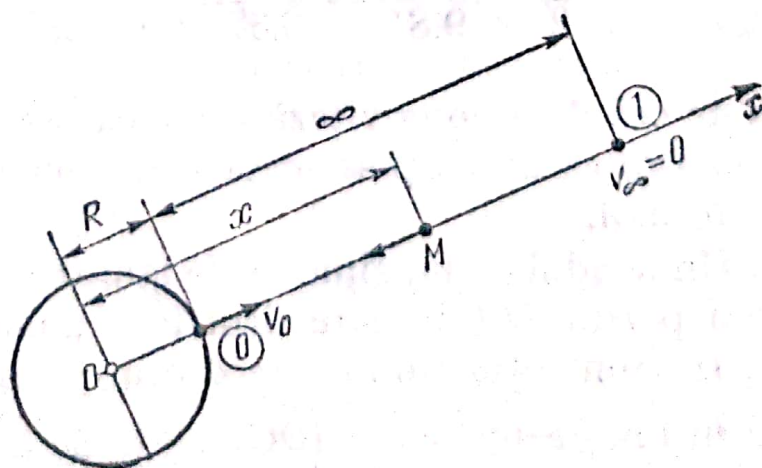


Fig. E 3.20

Forța care acționează corpul pe parcursul dintre poziția inițială și cea finală are expresia

$$F = \frac{kmM}{x^2}$$

Deoarece însă la suprafața Pământului avem $F = mg$ și $x = R$ rezultă

$$mg = \frac{kmM}{R^2} \Rightarrow g = \frac{kM}{R^2},$$

deci

$$F = \frac{mgR^2}{x^2}.$$

Avem

$$\Delta E = E_1 - E_0 = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\begin{aligned} L_t &= \int_R^\infty -F dx = - \int_R^\infty \frac{mgR^2}{x^2} dx = -mgR^2 \int_R^\infty \frac{dx}{x^2} = \\ &= mgR^2 \left| \frac{1}{x} \right|_R^\infty = mgR^2 \left(0 - \frac{1}{R} \right) = -mgR. \end{aligned}$$

Înlocuind în (1) rezultă

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -mgR$$

de unde

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 6,37 \times 10^6} \approx 11 \text{ km/s.}$$

Aceasta este cea de a doua viteză cosmică, adică viteza necesară pentru ca un corp să scape din zona de atracție a Pământului.

E 3.21. Un pendul de lungime l este lansat fără viteză inițială din poziția OA în care firul face unghiul α cu verticala. În momentul când el trece prin poziția verticală firul întâlnește un cui C ($OC = \frac{l}{2}$). Se cere să se determine unghiul maxim β efectuat de partea mobilă

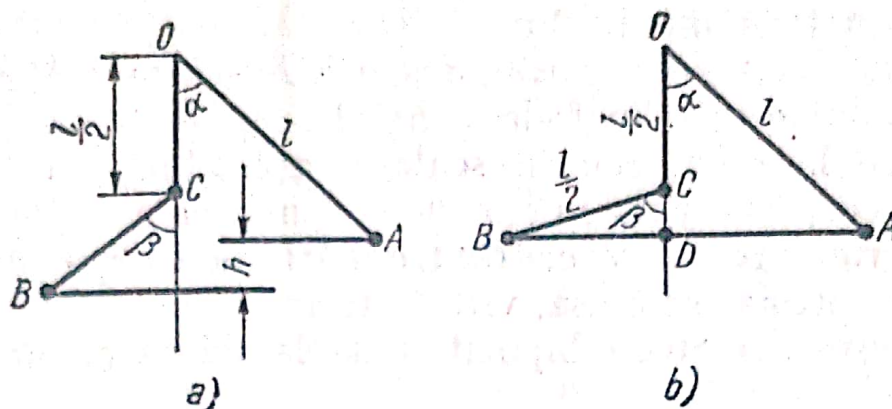


Fig. 3.21

a firului cînd pendulul ocupă poziția OCB (fig. E 3.21, a).

Rezolvare. Vom considera drept poziție inițială OA și finală OCB ; este ușor de observat că poziția verticală a pendulului nu joacă un rol special astfel încît nu o vom lua în considerare.

Neexistînd frecări vom aplica metoda energiei sub forma a II-a

$$\Delta E + \Delta \Pi = 0. \quad (1)$$

Rezultă

$$\Delta E = E_1 - E_0 = 0 - 0 = 0$$

$$\Delta \Pi = -mgh,$$

unde am presupus că poziția finală B se află cu distanța h sub nivelul poziției inițiale A (rezultatul era același dacă presupuneam invers). Introducînd în (1) și ținînd seama că $m \neq 0$, $g \neq 0$ rezultă $h = 0$, rezultat care spune că punctele A și B trebuie să se afle pe aceeași orizontală. Această concluzie transformă problema dată într-o problemă de geometrie (fig. E 3.21, b); rezultă

$$OD = OA \cos \alpha = l \cos \alpha = OC + CD = \frac{l}{2} + \frac{l}{2} \cos \beta$$

de unde rezultă

$$\cos \beta = 2 \cos \alpha - 1$$

rezultat independent de lungimea l a pendulului.

3.6. Metoda impulsului

3.6.1. *Principiul metodei; domeniu de utilizare.* Metoda impulsului este o metodă generală bipozițională, care conduce la două ecuații scalare, aplicabilă atât unui singur corp cât și sistemelor de corpuri: ea este folosită la determinarea oricăreia dintre mărimile ce apar explicit în expresia sa: masă, viteză, timp.

Ea este o metodă bipozițională la fel ca și metoda energiei.

3.6.2. *Noțiuni de bază, definiții, notații; relații.* În ecuațiile acestei metode apar următoarele mărimi:

m — masa corpului (kg),

$\vec{v}$ — vectorul viteză al corpului (m/s) avînd proiecțiile v_x , v_y pe axele unui sistem de referință.

$\vec{F}$ — vectorul rezultantă a forțelor ce acționează corpul, avînd proiecțiile pe axele unui sistem de referință $\sum F_x$, $\sum F_y$ egale cu sumele proiecțiilor vectorilor componenți pe aceleași axe.

Vectorul $m\vec{v}$, care reprezintă produsul dintre masa și viteza corpului mobil, constituie *impulsul* acestuia.

3.6.3. *Ecuațiile metodei.* Metoda impulsului se aplică sub mai multe forme, pe care le vom prezenta în cele ce urmează împreună cu domeniul lor de aplicabilitate.

Prima formă reprezintă metoda impulsului aplicată la mișcarea unui singur corp; ea este dată de relațiile

$$\begin{aligned} m(v_{1x} - v_{0x}) &= \int_0^t F_x dt \\ m(v_{1y} - v_{0y}) &= \int_0^t F_y dt \end{aligned} \quad (3.18)$$

în care v_{1x} , v_{1y} și v_{0x} , v_{0y} reprezintă respectiv proiecțiile vitezei finale $\vec{v}_1$ și ale vitezei inițiale $\vec{v}_0$ pe axele sistemului de referință ales.

Dacă suma proiecțiilor tuturor forțelor ($\sum F_x$, $\sum F_y$) pe una din axele Ox , Oy sau pe ambele axe sînt constante, atunci integralele din membrul al doilea au respectiv valorile $F_x t$, $F_y t$, unde t reprezintă intervalul de timp necesar mobilului pentru a ajunge din poziția inițială 0 în poziția finală 1.

Un caz particular simplu al acestei metode îl constituie acela în care suma proiecțiilor forțelor ce acțio-

nează asupra corpului pe una din axe sau pe amîndouă este nulă, denumită *metoda conservării impulsului*, pentru un singur corp: în acest caz rezultă

$$v_{1x} = v_{0x} \text{ sau (și) } v_{1y} = v_{0y}$$

adică proiecția vitezei mobilului pe axa respectivă este constantă.

Forma a doua reprezintă metoda impulsului aplicată mișcării unui sistem alcătuit din mai multe corpuri; ea provine din aplicarea metodei impulsului la fiecare corp în parte al sistemului între poziția inițială și finală și din adunarea rezultatelor astfel obținute; rezultă

$$\sum m_i v_{ix}^1 - \sum m_i v_{ix}^0 = \sum \int F_{ix} dt$$

$$\sum m_i v_{iy}^1 - \sum m_i v_{iy}^0 = \sum \int F_{iy} dt$$

în care F_{ix} și F_{iy} , reprezintă suma proiecțiilor tuturor forțelor exterioare aplicate fiecărui corp pe axele Ox , Oy , deoarece forțele care se exercită între corpuri (forțe interioare) dau proiecții egale și de sensuri contrarii, care prin adunare dispar din rezultatul final.

Un caz particular al acestei metode îl constituie acela în care suma proiecțiilor tuturor forțelor exterioare ce acționează asupra sistemului după una dintre axe ($\sum F_{ix}$ sau $\sum F_{iy}$) sau după ambele axe ($\sum F_{ix}$ și $\sum F_{iy}$) este nulă, denumit *metoda conservării impulsului* pentru sisteme de corpuri; în acest caz fie numai unul, fie ambii membri doi ai ecuațiilor de mai sus sînt nuli și avem

$$\begin{aligned} \text{și (sau)} \quad \sum m_i v_{ix}^1 &= \sum m_i v_{ix}^0 \\ \sum m_i v_{iy}^1 &= \sum m_i v_{iy}^0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

adică suma produselor masă — viteză a tuturor corpurilor sistemului în poziția finală 1 este egală cu suma produselor masă-viteză a tuturor corpurilor sistemului în poziția inițială 0.

Un caz mai particular al acestor relații este acela în care în poziția inițială toate corpurile sistemului se

află în repaus; în acest caz, relațiile de mai sus se simplifică, devenind

$$\sum m_i v_{ix} = 0 \text{ și (sau) } \sum m_i v_{iy} = 0 \quad (3.20)$$

unde indicele 1 a fost suprimat, poziția 1 fiind oarecare. Relațiile acestea au cele mai multe aplicații în problemele de fizică.

3.6.4. *Programul metodei.* Operațiile acestui program sînt arătate în fig. 3.13, ele sînt:

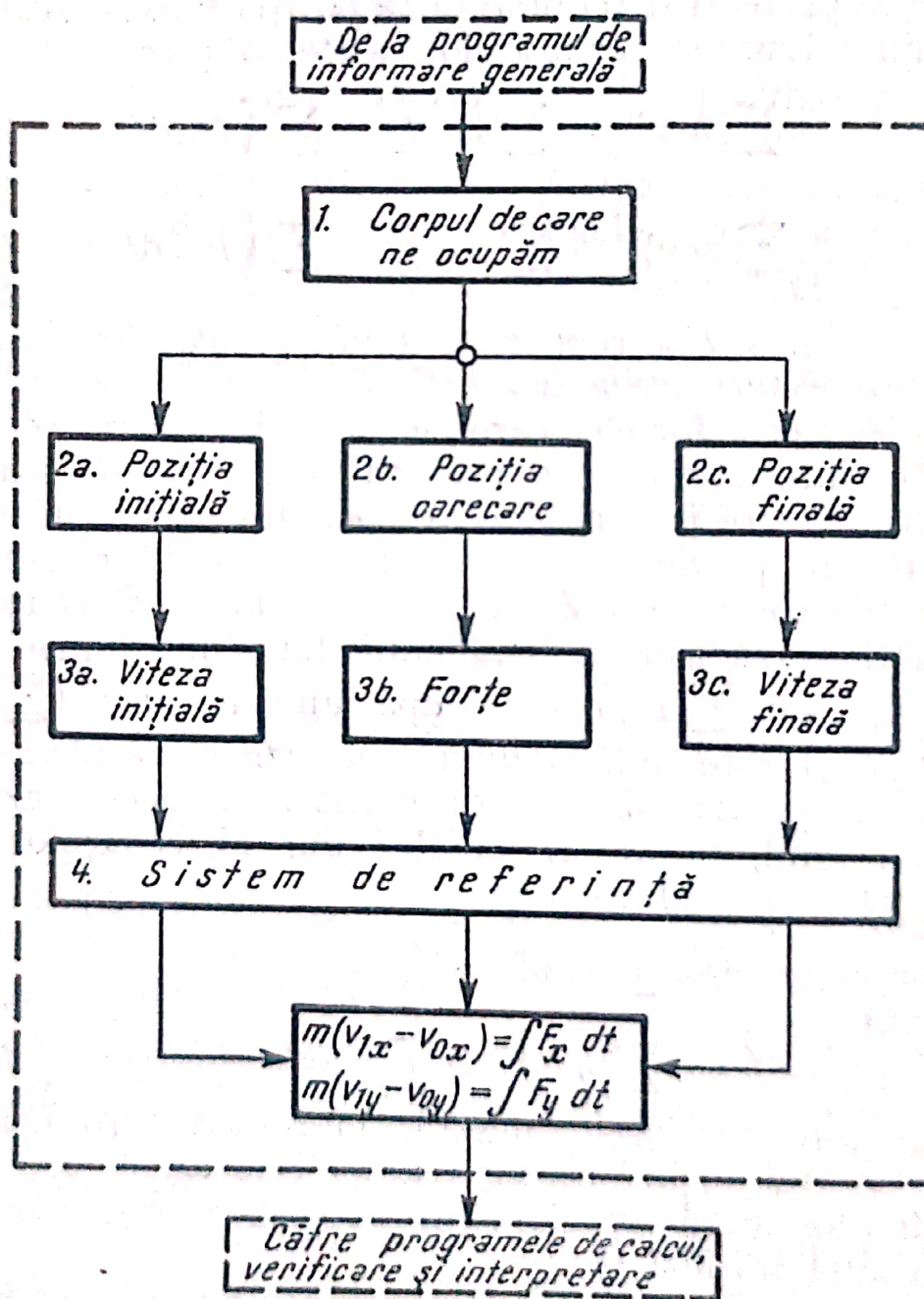


Fig. 3.13

a) precizarea corpului sau sistemului de corp de care ne ocupăm;

b) reprezentarea a trei poziții ocupate de sistemul material în timp și anume:

— poziția inițială 0,

— poziția oarecare situată între poziția inițială, și poziția finală;

— poziția finală 1;

c) reprezentarea mărimilor fizice care apar în ecuațiile acestei metode și anume:

— viteza sau vitezele inițiale ale corpurilor care alcătuiesc sistemul material considerat, reprezentate pe poziția inițială 0 a sistemului,

— forțele exterioare care acționează corpurile sistemului reprezentate pe poziția oarecare,

— viteza sau vitezele finale ale corpurilor sistemului material considerat, reprezentate pe poziția finală 1 a sistemului;

d) alegerea sistemului de referință pe care se fac proiecțiile forțelor și vitezelor;

e) scrierea ecuațiilor metodei impulsului.

3.6.5. Indicații și precizări. Metoda impulsului sau a conservării impulsului se aplică folosind numai viteze absolute, adică vitezele tuturor corpurilor față de un sistem de referință fix. Dacă un corp este supus la mai multe viteze față de corpuri mobile, atunci proiecția vitezei absolute a corpului respectiv se obține efectuând suma proiecțiilor vitezelor relative la care este supus corpul.

În expresia forțelor $\bar{F}$ nu intră forțe de inerție (de exemplu, forțele centrifuge).

E 3.22. Un corp este aruncat în vid, vertical în sus, cu viteza v_0 . Se cere să se determine timpul necesar atingerii înălțimii maxime.

Rezolvare. Corpul de care ne ocupăm este cel dat în problemă. El este reprezentat în cele trei poziții, împreună cu vitezele și forțele, în figura E 3.22.

Aplicând metoda impulsului în proiecție pe axa Ox avem [(3.18)]

$$m(0 - v_0) = \int_0^t (-mg) dt = -mgt$$

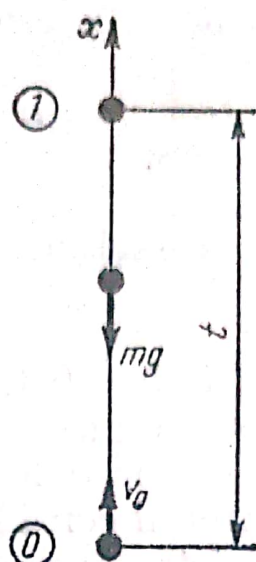


Fig. E 3.22

de unde rezultă

$$t = \frac{v_0}{g}.$$

E 3.23. Un corp este aruncat în vid cu viteza v_0 , a cărei direcție face unghiul α cu orizontala.

Se cere să se determine timpul necesar corpului pentru a ajunge pînă în poziția cea mai de sus a traiectoriei sale, precum și viteza lui în această poziție.

Rezolvare. Elementele necesare calculului sînt reprezentate în figura E 3.23. Aplicînd metoda impulsului în proiecție pe axele Ox și Oy , situate în planul

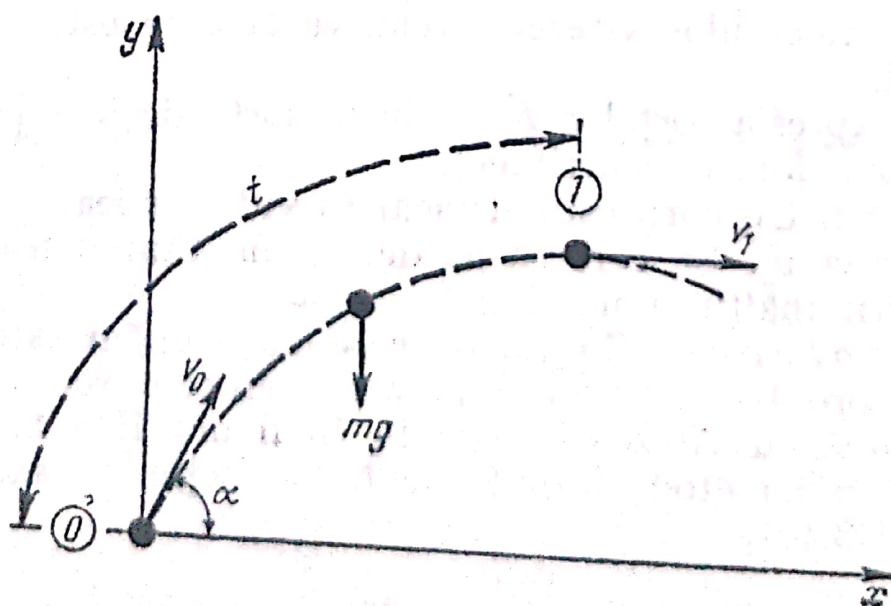


Fig. E 3.23

vertical ce conține traiectoria punctului mobil, rezultă [v, (3.18)]

$$m(v_1 - v_0 \cos \alpha) = 0 \text{ (deoarece } F_x = 0).$$

$$m(0 - v_0 \sin \alpha) = \int_0^t (-mg) dt = -mgt.$$

Se obține astfel

$$v_1 = v_0 \cos \alpha; \quad t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Pentru cazul particular $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (aruncare verticală) rezultă

$$v_1 = 0; \quad t = \frac{v_0}{g}.$$

Pentru cazul particular $\alpha = 0$ (aruncare orizontală):

$$v_1 = 0; \quad t = 0$$

deoarece corpul se află în momentul aruncării în punctul cel mai de sus al traiectoriei sale.

E 3.24. Un corp de masă m este aruncat, cu viteza v_0 , în susul unui plan înclinat cu unghiul α ; între corp și plan există frecare, de coeficient μ .

Se cere să se determine timpul necesar atingerii poziției celei mai îndepărtate pe punctul de aruncare.

Rezolvare. Elementele de calcul sînt arătate în figura E 3.24. Aplicînd metoda impulsului în proiec-

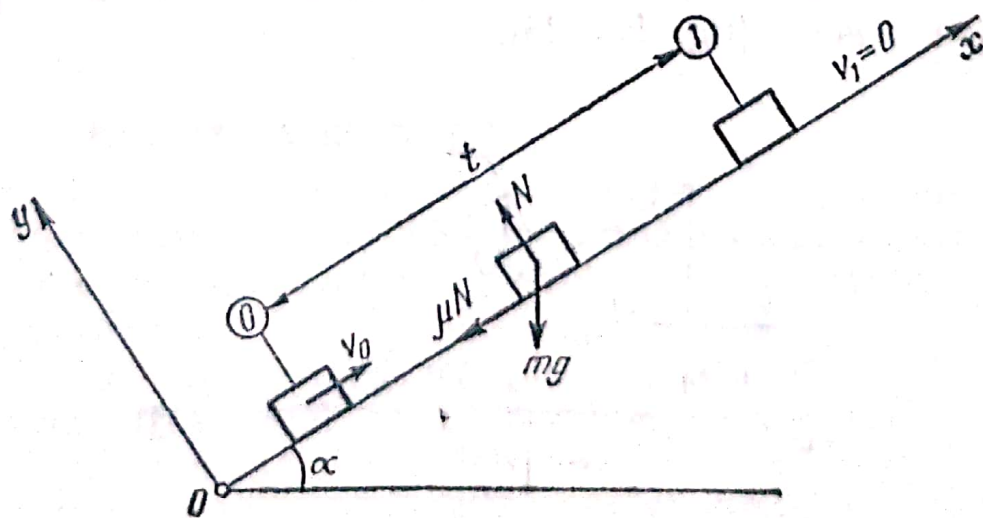


Fig. E 3.24

ție pe axele Ox (linia de cea mai mare pantă a planului înclinat) și Oy (perpendiculara pe aceasta) se obține

$$m(0 - v_0) = \int_0^t (-\mu N - mg \sin \alpha) dt$$

$$m(0 - 0) = \int_0^t (N - mg \cos \alpha) dt$$

din care rezultă

$$N = mg \cos \alpha; \quad t = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}.$$

Pentru cazul particular $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (aruncare verticală) rezultă

$$N = 0; \quad t = \frac{v_0}{g}.$$

Pentru cazul particular $\alpha = 0$ (aruncare pe plan orizontal) rezultă

$$N = mg; \quad t = \frac{v_0}{\mu g}.$$

E 3.25. Pe o prismă de masă M , avînd una din fețe de forma unui plan înclinat cu unghiul α față de orizontală, se află în repaus un om de masă m . La un moment dat omul începe să alerge pe planul înclinat cu viteza u față de acesta.

Știind că între prismă și planul orizontal nu există frecare, se cere să se determine viteza cu care se deplasează prisma (fig. E 3.25).

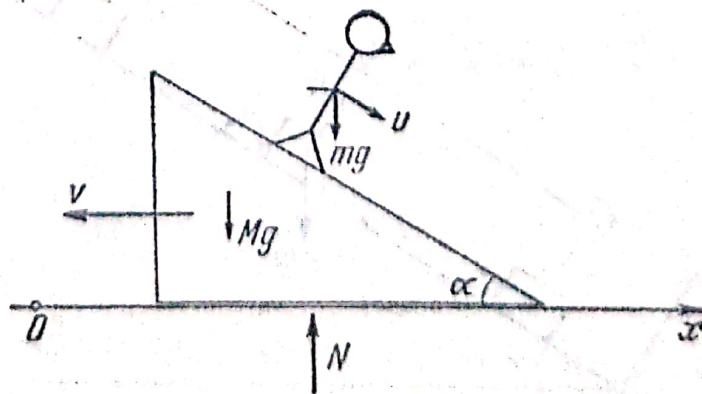


Fig. E 3.25

Rezolvare. Deoarece toate forțele exterioare ale sistemului de corpuri om-prismă considerat dau proiecții nule pe axa Ox și vitezele tuturor corpurilor au fost inițial nule, putem scrie [v. (3.20)]

$$\sum m_i v_{ix} = 0.$$

Într-adevăr, forțele exterioare sînt greutatea prismei Mg , greutatea omului mg și reacțiunea normală N a planului înclinat asupra prisme, toate verticale.

Forțele care se exercită între om și prismă sînt forțe interioare sistemului om-prismă, egale și opuse două cîte două.

Ținînd seama că omul este supus la două viteze (u și v), iar prisma numai la viteza v , presupusă spre stînga, rezultă

$$m(u \cos \alpha - v) + M(-v) = 0$$

de unde

$$v = \frac{m \cos \alpha}{M + m} u.$$

În cazul particular $\alpha = 0$ rezultă

$$v = \frac{m}{M + m} u$$

iar pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rezultă $v = 0$.

3.7. Metoda reducerii

3.7.1. Principiul metodei; domeniu de aplicabilitate.

A reduce un sistem vectori înseamnă a-i afla rezultanta, adică un singur vector care are același efect ca și întregul sistem.

Metoda reducerii indică procedeele analitice pentru determinarea rezultantei unui sistem de vectori. Ea poate fi aplicată în orice problemă unde se cere înlocuirea unui sistem de vectori printr-un vector unic.

Pentru simplificarea expunerii, în cele ce urmează ne vom referi la vectori-forță; rezultatele obținute rămân însă valabile și în cazul oricăror alte sisteme de vectori de altă natură decât forțe.

3.7.2. *Noțiuni de bază; definiții; notații; relații.* În ecuațiile acestei metode apar următoarele noțiuni:

Sistemul de forțe este un ansamblu (o mulțime) de mai multe forțe ce acționează asupra unuia sau mai multor corpuri.

Sistemele de forțe se deosebesc între ele după configurația suporturilor lor; din acest punct de vedere distingem:

— forțe coliniare: forțele ale căror suporturi sînt toate confundate;

— forțe concurente și coplanare: forțele ale căror suporturi sînt toate situate în același plan și trec prin același punct;

— forțe paralele și coplanare: forțele ale căror suporturi sînt toate paralele cu o direcție fixă și sînt situate în același plan;

— forțe coplanare oarecare: forțele ale căror suporturi sînt orientate oricum în același plan.

3.7.3. *Ecuațiile metodei.* Metoda reducerii are la bază o serie de relații analitice care conduc la determinarea univocă a rezultantei în fiecare din cele patru cazuri de sisteme de forțe menționate. Aceste relații sînt următoarele:

— Pentru sistemele de forțe coliniare (fig. 3.14)

$$R_x = \sum F_x; \quad R = |R_x|. \quad (3.2)$$

Rezultanta unui asemenea sistem de forțe se află pe dreapta-suport a tuturor forțelor, are drept valoare modulul sumei proiecțiilor tuturor forțelor pe direcția comună aleasă drept axă Ox și este orientată în sensul axei Ox dacă $R_x > 0$ și invers în caz contrar.



Fig. 3.14

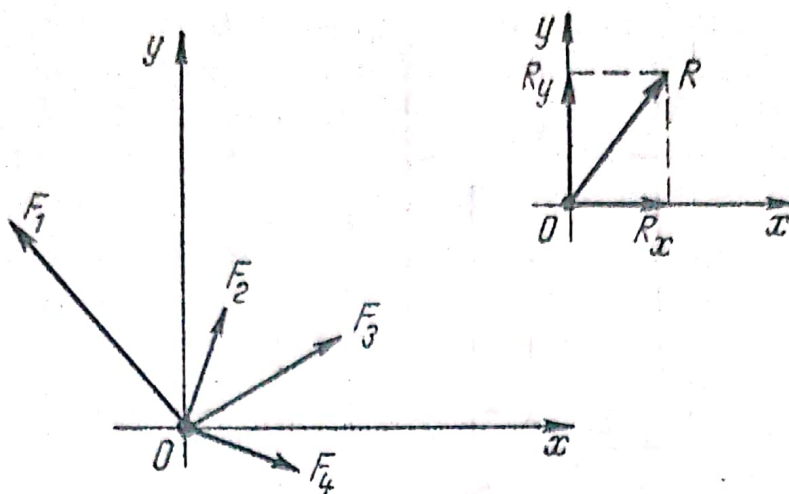


Fig. 3.15

— Pentru sistemele de forțe concurente și coplanare (fig. 3.15)

$$R_x = \sum F_x; \quad R_y = \sum F_y$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x}. \quad (3.22)$$

Rezultanta unui asemenea sistem de forțe se obține din adunarea geometrică a celor două forțe R_x și R_y , care reprezintă sumele proiecțiilor tuturor forțelor pe axele unui sistem xOy situat pe planul forțelor și avînd originea în punctele lor comune de concurență. Ea are drept punct de aplicație punctul comun de concurență; înclinarea față de axa Ox este dată de unghiul α . Cadrantul în care se află vîrfurile rezultantei este decis de semnul componentelor R_y și R_x .

— Pentru sistemele de forțe paralele și coplanare (fig. 3.16)

$$R_y = \sum F_y; \quad R = |R_y|; \quad X = \frac{\sum F_i x_i}{R}. \quad (3.23)$$

Rezultanta unui asemenea sistem de forțe este paralelă cu direcția comună a forțelor; pe această direcție este aleasă și axa Oy , deoarece $R_x = 0$, fiecare forță în parte dînd proiecție nulă pe axa Ox ; sensul ei este dat de semnul lui R_y .

Distanța X de la originea O a sistemului de coordonate la suportul rezultantei se calculează cu teorema lui Varignon, folosind regula momentelor.

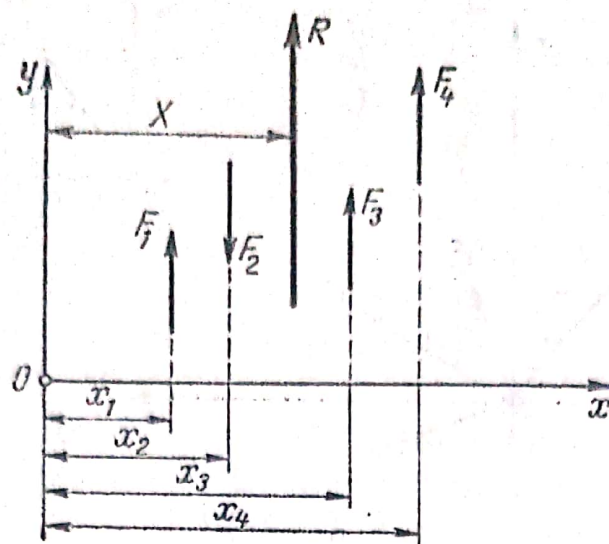


Fig. 3.16

Abscisele x_i și forțele F_i se iau în modul, semnul produselor $F_i x_i$ fiind dat numai de regula momentelor (pozitiv când rotația planului produsă de forța F_i în jurul lui O se face în sens invers acelor ceasornicului și invers).

— Pentru sistemele de forțe coplanare oarecare (fig. 3.17)

$$R_x = \sum F_x; \quad R_y = \sum F_y$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}; \quad D = \frac{\sum F_i d_i}{R}. \quad (3.24)$$

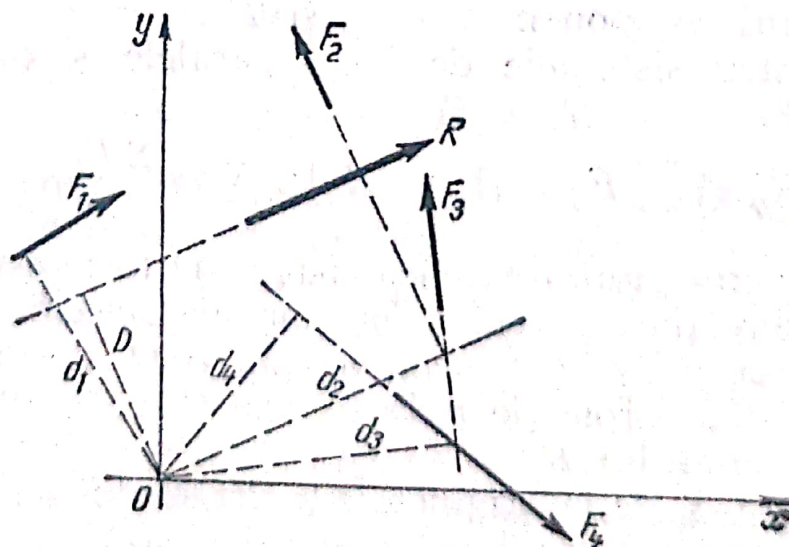


Fig. 3.17

Rezultanta unui asemenea sistem de forțe se obține din adunarea geometrică a celor două forțe R_x și R_y , care reprezintă suma proiecțiilor tuturor forțelor pe axele unui sistem xOy situat în planul forțelor. Ea nu mai este însă aplicată în originea O a acestui sistem, ci la o distanță D de ea, dată de teorema lui Varignon în care sumele produselor $F_i d_i$ sînt date de regula momentelor.

3.7.4. *Programul metodei.* Operațiile acestui program sînt arătate în fig. 3.18; ele sînt următoarele:

a) Se stabilește sistemul de vectori de care ne ocupăm.

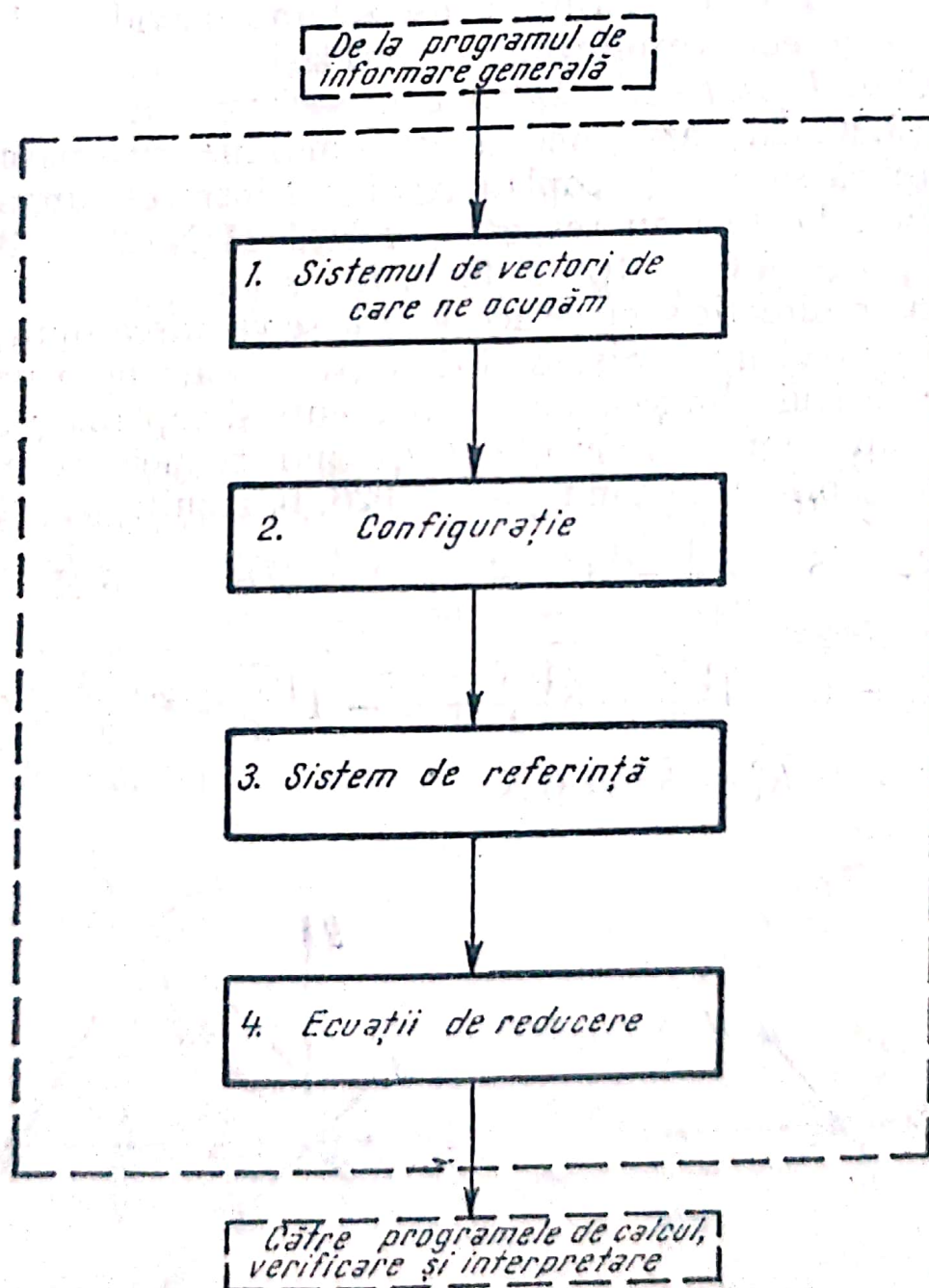


Fig. 3.18

b) Se stabilește căreia din cele patru configurații enumerate mai sus îi aparține sistemul de vectori considerat.

c) Se alege sistemul de referință așa cum s-a arătat mai înainte.

d) Se scriu ecuațiile care determină modulul și orientarea rezultantei sistemului de vectori de care ne ocupăm.

3.7.5. *Indicații și precizări.* Relațiile pentru determinarea rezultantei sînt valabile numai pentru sistemele de referință indicate la pct. 3. În cazul alegerii altor sisteme de referință ele se schimbă; evident, la un calcul corect, rezultatul este același.

3.7.6. *Exemple de aplicare a metodei*

E 3.26. În cazul unei sfere omogene cu masa m se aplică șase forțe coplanare făcînd între ele unghiuri de 60° . Forțele au respectiv valorile 1 N, 2 N, 3 N, 4 N, 5 N și 6 N (fig. E 3.26, a).

În ce direcție și cu ce accelerație se va mișca sfera? [7]

Rezolvare. Sistemul de forțe de care ne ocupăm este alcătuit din șase forțe concurente și coplanare. Alegînd un sistem de referință xOy , avînd originea în centrul sferei și orientat ca în figura E 3.26, b, rezultă [v. (3.22)]

$$R_x = 5 + 4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} - 2 - 1\frac{1}{2} + 6\frac{1}{2} = 6 \text{ N}$$

$$R_y = 0 + 4\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 - 1\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 6 \text{ N}$$

$$\varphi = 0.$$

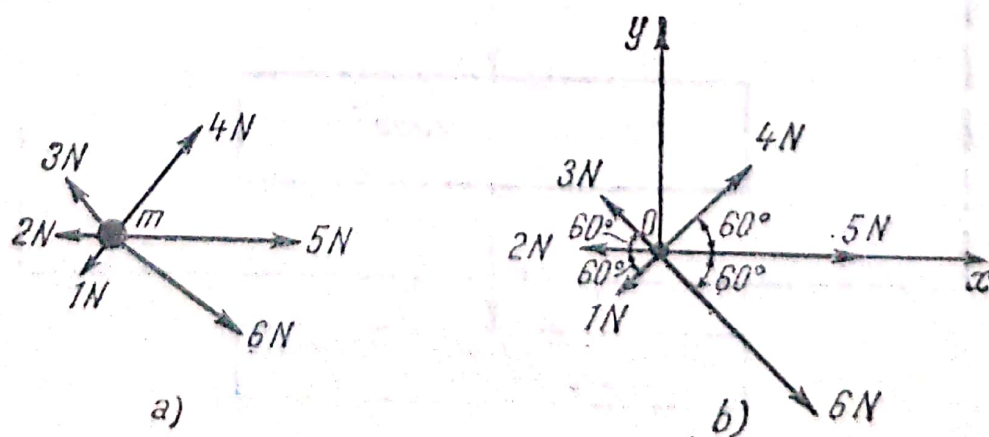


Fig. E 3.26

Rezultanta forțelor are valoarea $R = 6 \text{ N}$ și este orientată pe direcția și în sensul forței de 5 N .

Accelerația sferei are valoarea

$$a = \frac{R}{m} = \frac{6}{4} = 1,5 \text{ m/s}^2$$

orientată la fel ca și R .

E 3.27. Trei conductoare rectilinii foarte lungi, străbătute de curenți electrici de aceeași intensitate, sînt așezate de-a lungul laturilor bazei unui tetraedru regulat. Dacă conductoarele sînt izolate electric unul față de altul, iar sensul curenților rămîne mereu pozitiv la parcurgerea perimetrului bazei în sens trigonometric, se cere să se afle intensitatea cîmpului magnetic și inducția magnetică în vîrfurile tetraedrului opus bazei, cunoscînd muchia tetraedrului.

Aplicație numerică: $l = 12\sqrt{3} \text{ cm}$, $I = 90 \text{ A}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$. [15, 12/63].

Rezolvare. Componentele H ale intensității rezultante H_R sînt vectori concurenți, perpendiculari pe înălțimile coborîte din vîrfurile S pe cele trei laturi ale tetraedrului, cu sensul determinat de regula burghiului drept și de aceeași valoare, dată de

$$H = \frac{I}{2\pi a} = \frac{I}{2\pi l \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{90 \times 10^3}{\pi \sqrt{3} \times 12\sqrt{3}} = \frac{750}{3\pi} \approx 80 \text{ A/m}$$

(fig. E 3.27, a).

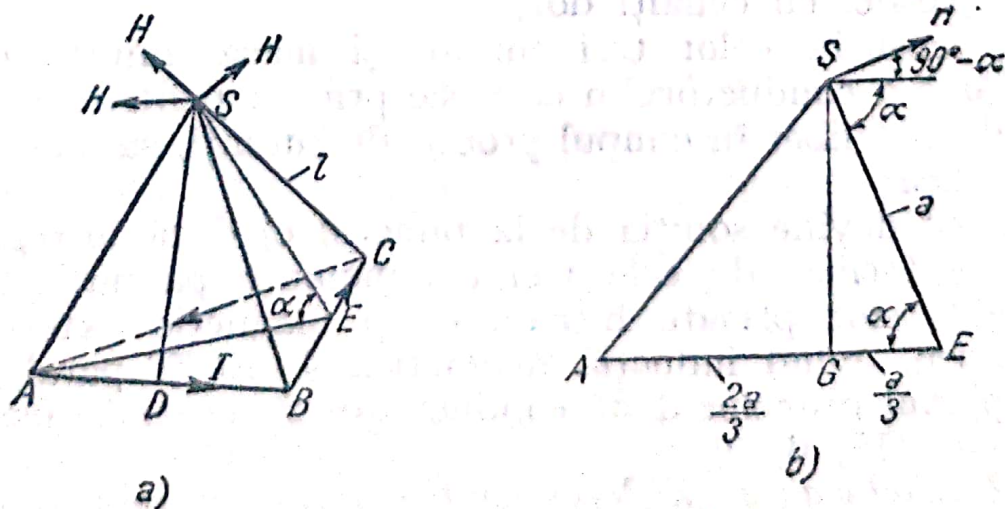


Fig. E 3.27

Pentru calculul intensității rezultante a câmpului magnetic în vârful S al tetraedrului se observă că, deoarece componentele sînt de aceeași valoare și identic așezate în raport cu forțele tetraedrului, rezultanta este verticală și are valoarea

$$H_R = 3H \sin (90 - \alpha) = 3H \cos \alpha$$

Din triunghiul SAE (fig. E 3.27, b) rezultă

$$\cos \alpha = \frac{\frac{a}{3}}{a} = \frac{1}{3}$$

și deci

$$H_R = H = 80 \text{ A/m.}$$

Inducția magnetică este un vector ce are aceeași direcție și sens cu intensitatea câmpului magnetic resultant și valoarea

$$B = \mu_0 H_R = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{750}{3\pi} = 10^{-4} \text{ T.}$$

E 3.28. Două conductoare paralele, aflate în plan orizontal la 5 cm unul de altul, sînt parcurse în sens contrar de curenți egali cu 500 A fiecare.

Se cere: a) valoarea inducției magnetice într-un punct C , aflat la 5 cm de fiecare conductor;

b) valoarea forțelor electromagnetice pe unitatea de lungime, care acționează asupra unui conductor parcurs de un curent de 400 A, care trece prin punctul C și este paralel cu ceilalți doi;

c) sensurile celor trei curenți și masa unității de lungime a conductorului ce trece prin C , pentru ca el, fiind lăsat liber în câmpul produs de curenți, să stea în echilibru;

d) ce devine soluția de la punctul c) dacă întregul sistem format de cele trei conductoare parcurse de curenți sînt plasate într-un câmp magnetic exterior uniform, avînd inducția magnetică $4 \cdot 10^{-3} \text{ T}$ paralelă cu planul primelor două conductoare și perpendiculară pe ele. [15, 6/69].

Rezolvare. a) Vectorii $\vec{H}_A$ și $\vec{H}_B$, ce reprezintă intensitățile câmpului magnetic creat de conductorii A

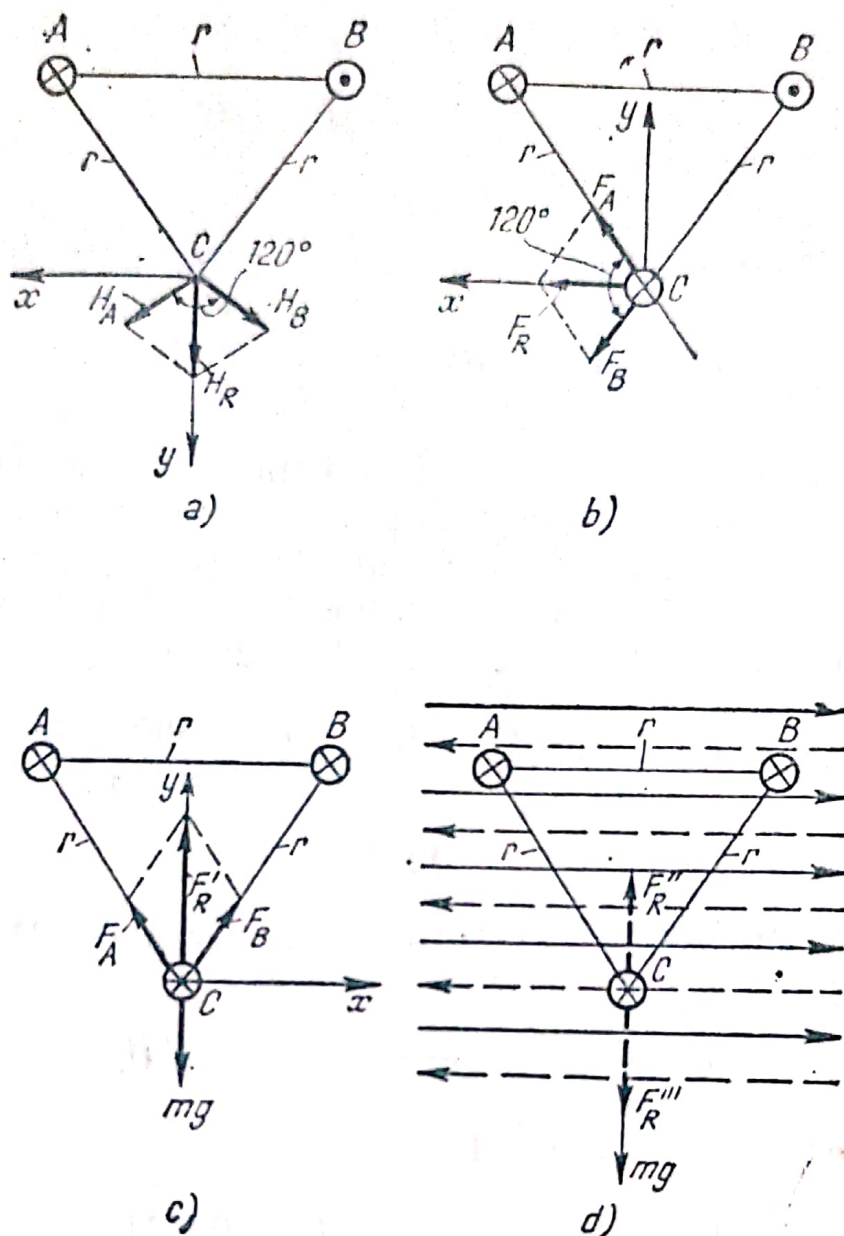


Fig. E 3.28

și B în punctul C , sînt perpendiculari în acest punct pe dreptele AC și BC , au sensul determinat de regula burghiului drept (fig. E 3.28, a) și au valoarea

$$H_A = H_B = H = \frac{1}{2\pi r} = \frac{500}{2\pi \cdot 5 \times 10^{-2}} = \frac{5000}{\pi} \text{ A/m.}$$

Valorile proiecțiilor vectorilor H_A și H_B pe axele de coordonate Cx și Cy sînt

$$H_x = 0; H_y = 2H \cos 60^\circ = H.$$

Valoarea intensității rezultante este

$$H_R = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = H$$

și are direcția și sensul axei Cy .

Inducția corespunzătoare valorii rezultante H_R este

$$B = \mu H_R = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{5000}{\pi} = 2 \times 10^{-3} \text{T.}$$

b) Vectorii F_A și F_B , ce reprezintă forțele electromagnetice exercitate pe unitatea de lungime a conductorului situat în punctul C , au direcția dreptelor AC și BC , sensul către A pentru conductorul A și dinspre B pentru conductorul B (fig. E 3.28, b) și valoarea

$$F_A = F_B = F = \frac{\mu I_A I_C l}{2\pi a} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 500 \times 400 \times 1}{2\pi \times 5 \times 10^{-2}} = 0,8 \text{ N.}$$

Valorile proiecțiilor vectorilor F_A și F_B pe axele de coordonate Cx și Cy sînt

$$F_x = 2F \cos 60^\circ = F; F_y = 0.$$

Valoarea forței rezultante este

$$F_R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = F = 0,8 \text{ N.}$$

c) Pentru ca acel conductor care trece prin C să se afle în echilibru în câmpul magnetic creat de conductorii din A și B este necesar ca sensurile curenților ce străbat cei trei conductori să fie aceleași (fig. E 3.28, c).

Făcînd același raționament ca la punctul b) se obține succesiv

$$F'_x = 0; F'_y = 2F \cos 30^\circ = F\sqrt{3}; F'_R = F\sqrt{3}.$$

Conductorul din C este în echilibru cînd rezultanta F'_R este egală cu greutatea proprie a unității de lungime a conductorului respectiv

$$F'_R = mg$$

de unde rezultă

$$m = \frac{F\sqrt{3}}{g} = \frac{0,8 \times 1,73}{9,8} = 0,141 = \frac{\sqrt{2}}{10} \text{ kg/m.}$$

d) Dacă întreg sistemul de conductori este plasat într-un câmp magnetic exterior uniform, de inducție dată, paralel cu planul conductorilor din A și B (fig. E 3.28, d) asupra conductorului din C apare o forță suplimentară avînd aceeași direcție cu rezultanta F'_R și avînd sensul acesteia cînd sensul cîmpului este dinspre B spre A .

Valoarea forței rezultante crește și este

$$F''_R = F'_R + f = F'_R + BI = 0,8\sqrt{3} + 4 \times 10^{-3} \times \\ \times 400 = 2,985 \text{ N}$$

iar masa pe unitatea de lungime a conductorului din C crește și este egală cu

$$m = \frac{F''_R}{g} = \frac{2,985}{9,8} = 0,304 \text{ kg/m}$$

În cazul cînd sensul cîmpului magnetic este dinspre A spre B valoarea forței rezultante este

$$F'''_R = F'_R - f = 0,8\sqrt{3} - 4 \times 10^{-3} \times 400 = \\ = -0,215 \text{ N.}$$

Acest rezultat arată că în cel de al doilea caz conductorul ce trece prin C nu poate fi menținut în echilibru de conductoarele din B și A , sensul forței rezultante fiind același cu cel al greutatei proprii a conductorului.

E 3.29. Asupra unei plăci plane acționează cinci forțe dispuse ca în figura E 3.29, a. Distanțele sînt date în centimetri. Se cere să se afle rezultanta acestui sistem de forțe.

Rezolvare. Deoarece ne sînt date coordonatele punctelor de aplicație ale forțelor, calculul distanțelor de la punctul O la suportul fiecărei forțe se efectuează ceva mai greu; descompunînd însă fiecare forță în cîte două componente și operînd cu un număr dublu de forțe vom avea o mai mare operativitate de calcul, deoarece distanțele de la punctul O la suporturile

acestor componente sînt chiar coordonatele punctelor de aplicație (fig. E 3.29, b). Avem

$$X_1 = 300 \frac{\sqrt{3}}{2} = 259 \text{ N}; \quad Y_1 = 300 \frac{1}{2} = 150 \text{ N}$$

$$X_2 = 200 \frac{1}{2} = 100 \text{ N}; \quad Y_2 = 200 \frac{\sqrt{3}}{2} = 173 \text{ N}$$

$$X_3 = 0; \quad Y_3 = 650 \text{ N}$$

$$X_4 = 500 \cos 75^\circ = 128 \text{ N}; \quad Y_4 = 500 \sin 75^\circ = 483 \text{ N}$$

$$X_5 = 400 \frac{\sqrt{2}}{2} = 283 \text{ N}; \quad Y_5 = 400 \frac{\sqrt{2}}{2} = 283 \text{ N}$$

cu care, ținînd seama de relația (3.24), obținem

$$R_x = X_1 + X_2 + X_3 - X_4 - X_5 = 259 + 100 + 0 - 128 - 283 = -54 \text{ N}$$

$$R_y = Y_1 + Y_2 - Y_3 + Y_4 - Y_5 = 150 + 173 - 650 + 483 - 283 = -127 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{54^2 + 127^2} = 138 \text{ N}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-127}{-54} = 2,4 \Rightarrow \alpha \approx 67^\circ.$$

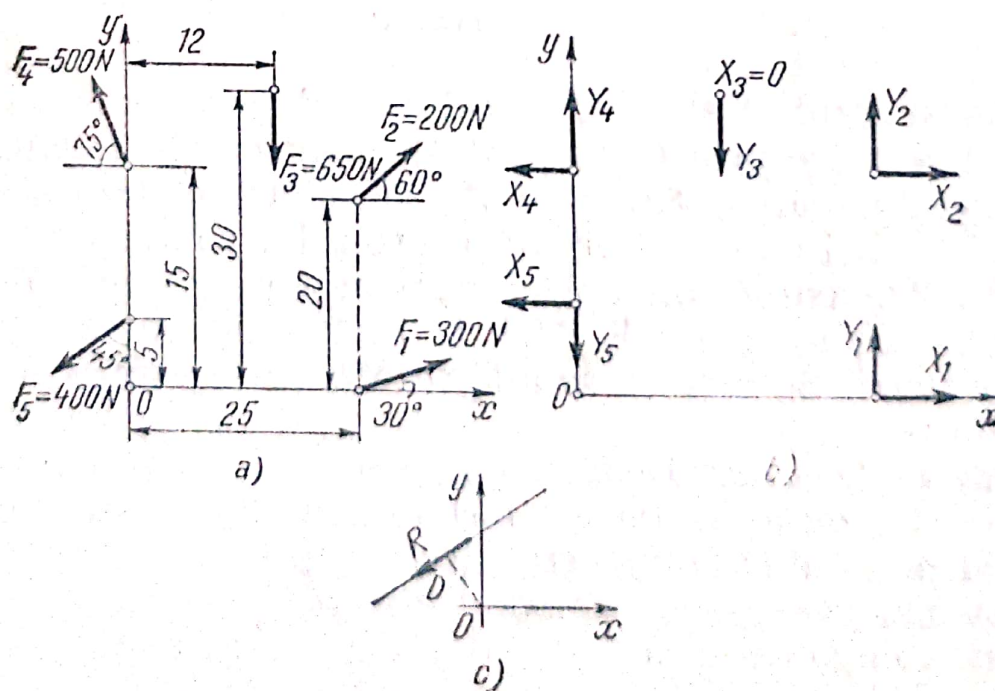


Fig. E 3.29

Rezultanta este arătată în fig. E 3.29, c. Pentru determinarea distanței D aplicăm regula de compunere a momentelor

$$\sum F_i d_i = 25 \times 150 + 25 \times 173 - 12 \times 650 - 20 \times 100 + 15 \times 129 + 5 \times 283 = 1625 \text{ N cm},$$

cu care

$$D = \frac{\sum F_i d_i}{R} = \frac{1625}{138} = 11,8 \text{ cm} = 0,118 \text{ m}.$$

Deoarece $D > 0$ reiese că rezultanta a fost reprezentată corect; în caz contrar suportul său trebuia să se afle de cealaltă parte a originii.

3.8. Metoda echilibrului

3.8.1. *Principiul metodei; domeniu de aplicabilitate.*

Metoda echilibrului are un domeniu foarte larg de aplicabilitate și anume oriunde intervin mai multe mărimi vectoriale al căror efect de ansamblu trebuie să fie nul (forțe, curenți, câmpuri).

Ea constă în esență în aplicarea condițiilor care exprimă faptul că rezultanta sistemului de vectori considerat este nulă.

3.8.2. *Noțiuni de bază; definiții; notații; relații.*

Noțiunile de bază folosite la această metodă sînt aceleași ca și în cazul metodei reducerii și anume noțiunea de proiecție a unui vector pe o axă și aceea de moment al unui vector în raport cu un punct.

3.8.3. *Ecuatiile metodei.* Metoda echilibrului se prezintă în calcule cu un număr de una, două sau trei ecuații, corespunzător configurației sistemului de vectori care apar în problema respectivă.

Aceste ecuații, denumite *ecuații de echilibru*, sînt:

— pentru sistemele de vectori coliniari la care axa este aleasă pe direcția comună a vectorilor

$$\sum F_x = 0; \quad (3.25)$$

— pentru sistemele de vectori concurenți și coplanari la care s-a ales un sistem de referință xOy situat în

planul vectorilor și avînd originea în punctul lor de concurență

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0; \quad (3.26)$$

— pentru un sistem de vectori paraleli și coplanari, la care s-a ales un sistem de referință xOy avînd axa Ox perpendiculară pe direcția comună a vectorilor și axa Oy paralelă cu aceasta

$$\sum F_y = 0, \quad \sum F_i x_i = 0 \quad (3.27)$$

în care x_i reprezintă distanțele de la punctul O la direcția vectorilor F_i , semnul produselor $F_i x_i$ fiind determinat de regula semnului momentelor;

— pentru un sistem de forțe coplanare oarecare, la care s-a ales un sistem de referință situat cu planul vectorilor

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_i d_i = 0 \quad (3.28)$$

în care d_i reprezintă distanțele de la punctul O la suporturile vectorilor F_i , semnul produselor $F_i d_i$ fiind determinat de regula semnului momentelor. Acestea sînt toate configurațiile sistemelor de vectori care se întîlnesc pe problemele de fizică și ecuațiile de echilibru corespunzătoare.

3.8.4. *Programul metodei.* Operațiile acestui program sînt arătate în fig. 3.19; ele sînt:

- a) se precizează corpul de care ne ocupăm;
- b) se izolează corpul de care ne ocupăm de toate celelalte corpuri care îl înconjoară și cu care el vine în contact sau care îl acționează de la distanță; aceasta înseamnă că acțiunile tuturor acestor corpuri asupra corpului de care ne ocupăm trebuie reprezentate prin vectori ce arată felul acestor acțiuni (forțe, intensități, cîmpuri);
- c) se stabilește căreia din cele patru configurații enumerate mai sus îi aparțin vectorii ce reprezintă acțiunea corpurilor înconjurătoare asupra corpului de care ne ocupăm;

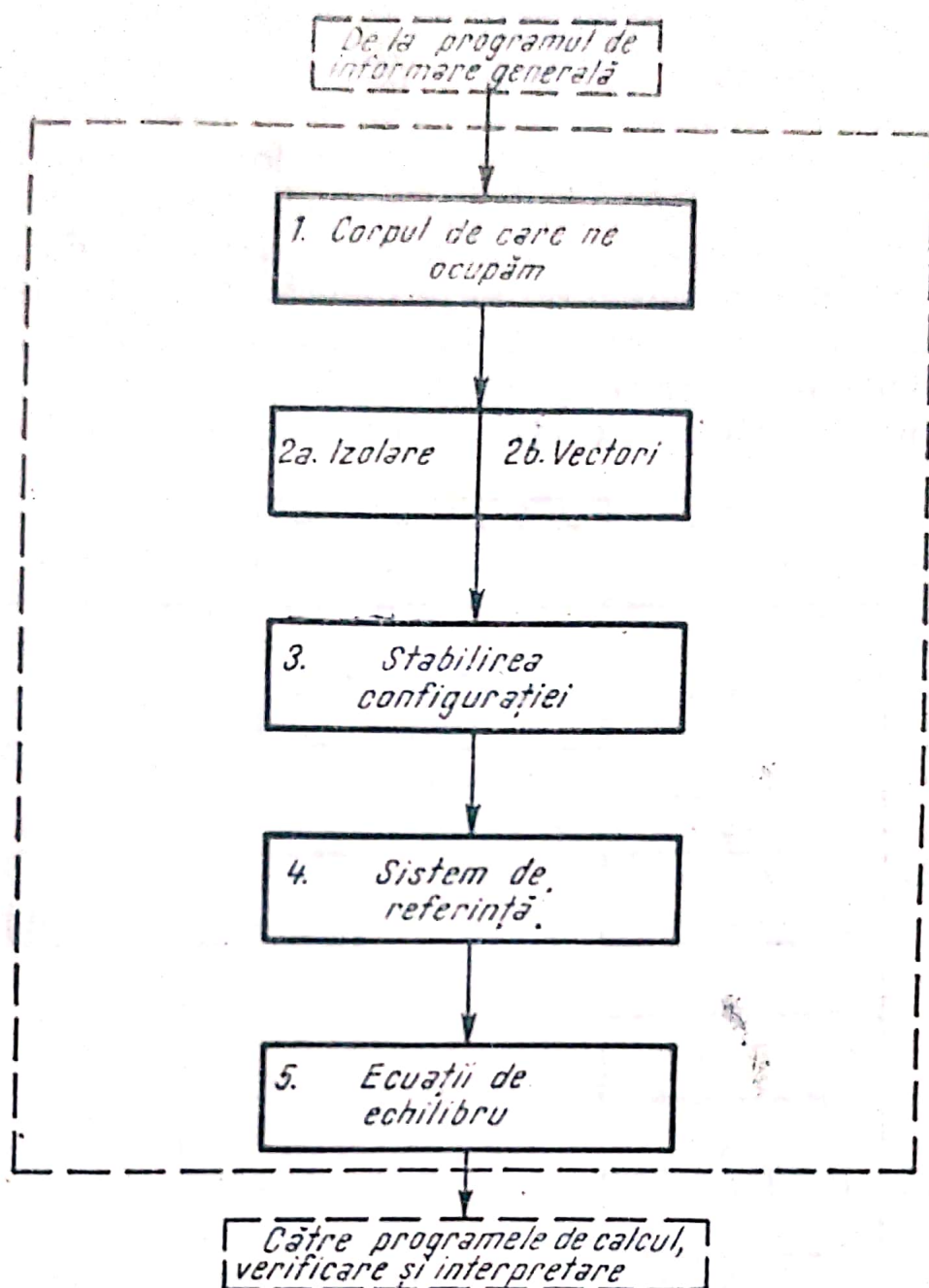


Fig. 3.19

d) se alege un sistem de referință față de care se vor scrie ecuațiile de echilibru ale vectorilor care acționează corpul de care ne ocupăm;

e) se scriu ecuațiile de echilibru corespunzătoare configurației stabilite la punctul anterior.

Calcululele ulterioare se desfășoară conform programelor care urmează, avînd în vedere necunoscutele cerute în problemă.

În figura 3.20 este arătat programul de aplicare a acestei metode la studiul dinamic al mișcării unui corp.

Este cunoscut faptul că dacă la forțele $\vec{F}$, care apar în ecuația fundamentală a dinamicii (forțe de greutate, frecări, reacțiuni), se mai adaugă și forțele de inerție se obține un sistem de forțe de echilibru, căruia poate deci să i se aplice programul metodei echilibrului.

Operațiile acestui program sînt:

a) se stabilește corpul de care ne ocupăm;

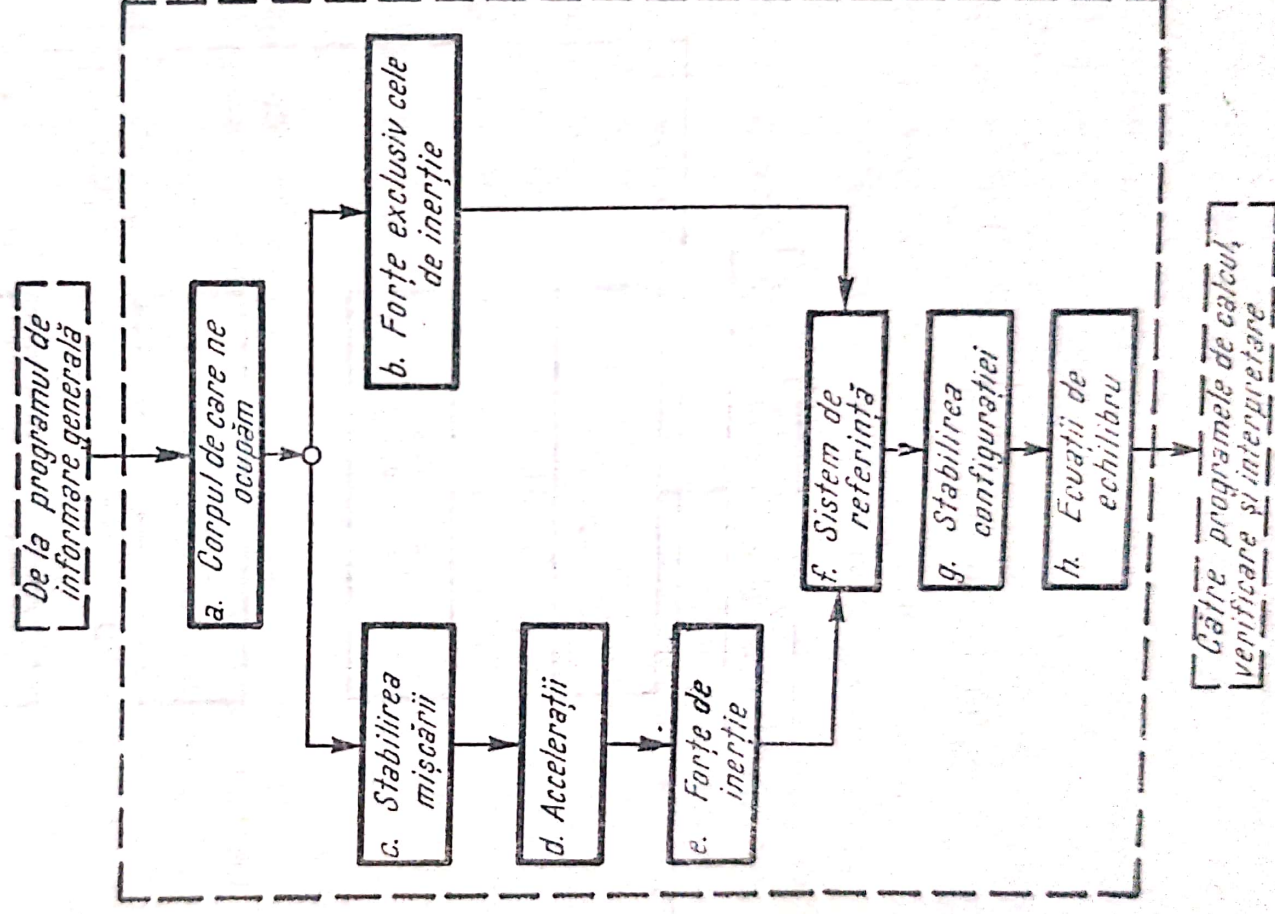


Fig. 3.20

b) se reprezintă pe acest corp toate forțele care îl acționează exclusiv forțele de inerție;

c) se stabilește mișcarea pe care o execută corpul de care ne ocupăm;

d) se stabilește accelerația sau accelerațiile la care este supus acest corp;

e) se reprezintă forțele de inerție corespunzătoare fiecărei accelerații pe care o are corpul; aceste forțe au drept modul produsul dintre masa și accelerația respectivă a corpului și sînt orientate invers accelerației;

f) se alege un sistem de referință față de care se vor scrie ecuațiile de echilibru ale vectorilor-forță care acționează corpul de care ne ocupăm;

g) se stabilește căreia din cele patru configurații de mai sus aparțin vectorii forță aplicați corpului de care ne ocupăm;

h) se scriu ecuațiile de echilibru ale forțelor corespunzătoare configurației stabilite la punctul anterior.

3.8.5. Indicații și precizări. La aplicarea acestei metode trebuie avute în vedere următoarele:

— stabilirea exactă a acțiunii corpurilor înconjurătoare asupra corpului de care ne ocupăm (module și sensuri);

— alegerea unui sistem de referință convenabil pentru calcule, știut fiind că rezultatele finale nu sînt influențate de această alegere ci numai calculele intermediare.

3.8.6. Exemple de aplicare a metodei

E 3.30. Două sarcini punctiforme, electric pozitive, egale cu $\frac{1}{30}$ mC, se găsesc la distanța $\sqrt{3}$ m pe orizontală.

Între ele, la jumătatea distanței, o bobită de 10 g, încărcată electric negativ, cu $\frac{1}{3}$ μC, este menținută în echilibru de a treia sarcină electric pozitivă punctiformă, avînd 0,3 mC.

Se cere să se determine: poziția celei de a treia sarcini electrice și în caz că ea dispare, noua poziție de echilibru a bobitei (permisivitatea electrică a mediului este 1 și accelerația gravitațională 10 m/s^2). [15,6/67]

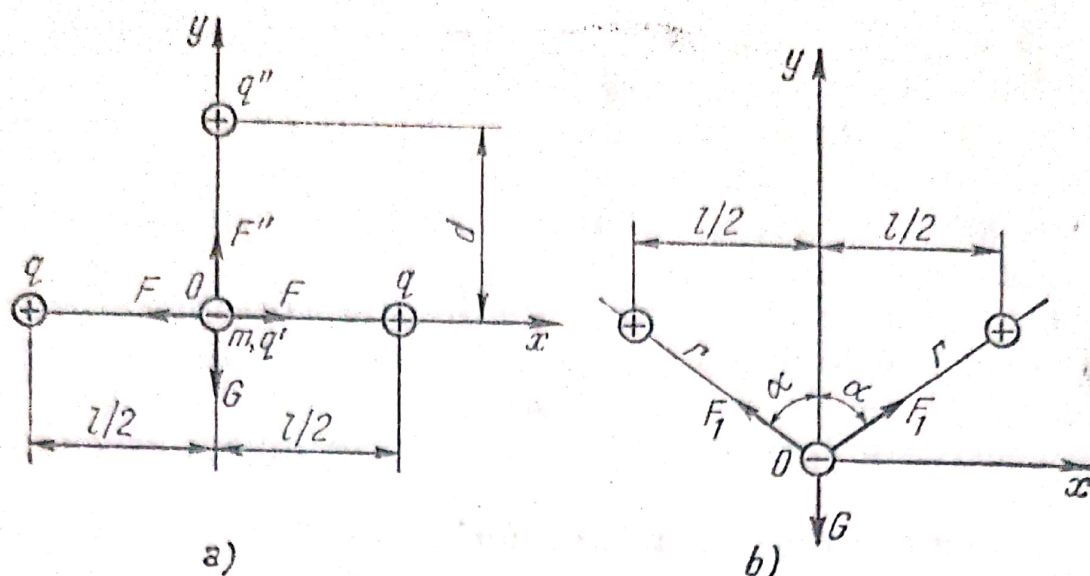


Fig. E 3.30

Rezolvare. Corpul de care ne ocupăm este bobita; în prima situație asupra ei acționează patru forțe (fig. E 3.30, a): greutatea sa, forța de atracție F'' exercitată de sarcina q'' și cele două forțe de atracție de aceeași valoare F , exercitate de sarcinile q .

Forțele care acționează bobita alcătuiesc un sistem de forțe concurente și coplanare.

Se alege sistemul de referință xOy avînd axa Ox orizontală, axa Oy verticală și originea în centrul bobitei (punctul de concurență al forțelor).

Ecuatiile de echilibru sînt (3.26)

$$(\sum F_x = 0) \quad F - F = 0 \quad (\text{identitate})$$

$$(\sum F_y = 0) \quad F'' - G = 0$$

în care

$$F'' = \frac{q'q''}{d^2} 9 \cdot 10^9; \quad G = mg.$$

Înlocuind în cea de a doua ecuație deducem valoarea distanței d

$$d = \sqrt{\frac{q'q''}{mg} \times 9 \times 10^9} = \sqrt{\frac{0,3 \times 10^3 \times \frac{1}{3} \times 10^{-6}}{10 \times 10^{-3} \times 10}} = 3 \text{ m.}$$

În cea de a doua situație bobita este acționată numai de trei forțe: greutatea sa G și cele două forțe de atrac-

ție de aceeași valoare F_1 , exercitate de sarcinile q ; forța exercitată de sarcina q'' nu mai există (fig. 3.30, b).

Poziția de echilibru se află pe mediatoarea segmentului ce unește cele două sarcini de valoare q .

Cele două forțe F_1 și greutatea G alcătuind un sistem de forțe concurente și coplanare, ecuațiile de echilibru sînt [(3.26)]

$$(\sum F_x = 0) \quad F_1 \sin \alpha - F_1 \sin \alpha = 0 \quad (\text{identitate})$$

$$(\sum F_y = 0) \quad 2F_1 \cos \alpha - G = 0.$$

Din ultima ecuație rezultă valoarea unghiului α care determină poziția de echilibru

$$\cos \alpha = \frac{G}{2F_1}.$$

Întrucît

$$r = \frac{l}{2 \sin \alpha} \text{ rezultă } F_1 = \frac{qq'}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{qq' \sin^2 \alpha}{\pi\epsilon_0 l^2}$$

și deci

$$\cos \alpha \sin^2 \alpha = \frac{mg\pi\epsilon_0 l^2}{2qq'} = \frac{10 \times 10^{-3} \times 10 \times 3}{72 \times 10^9 \times \frac{1}{30} \times 10^{-3} \times \frac{1}{3} \times 10^{-6}} = \frac{3}{8}$$

Rezultă deci ecuația în α

$$\cos^3 \alpha - \cos \alpha + \frac{3}{8} = 0$$

cu soluțiile

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1 = 60^\circ$$

$$\cos \alpha_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{4} \approx \frac{-1 \pm 3,6}{4}$$

adică

$$\cos \alpha_2 = -\frac{4,6}{4} \quad (\text{inacceptabil, deoarece } \cos \alpha_2 < -1)$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{2,6}{4} = 0,65 \Rightarrow \alpha_3 = 49^\circ.$$

E 3.31. O bară, al cărui centru de greutate se află la mijlocul său, se sprijină cu un capăt pe o suprafață plană orizontală, iar cu celălalt de un perete vertical.

Ce tensiune trebuie creată într-un fir legat cu unul din capete de mijlocul barei, iar cu celălalt de punctul de îmbinare al peretelui cu suprafața orizontală (fig. E 3.31, a) astfel încât în lipsa frecărilor bara să nu cadă? [7, nr. 190].

Rezolvare. Izolînd bara observăm că asupra ei acționează următoarele patru forțe (fig. E 3.31, b):

- greutatea proprie G ;
- tensiunea din fir T ;
- reacțiunea peretelui orizontal N_1 ;
- reacțiunea peretelui vertical N_2 .

Aceste forțe alcătuiesc un sistem de forțe coplanare oarecare (bara are lungimea l).

Alegînd sistemul de referință xOy ca în figură și indicînd poziția barei prin unghiul α , avem [v. (3.28)]

$$(\sum F_x = 0) \quad -T \sin \alpha + N_2 = 0$$

$$(\sum F_y = 0) \quad N_1 - G - T \cos \alpha = 0$$

$$(\sum F_i d_i = 0) \quad N_1 l \sin \alpha - N_2 l \cos \alpha - G \frac{l}{2} \sin \alpha = 0.$$

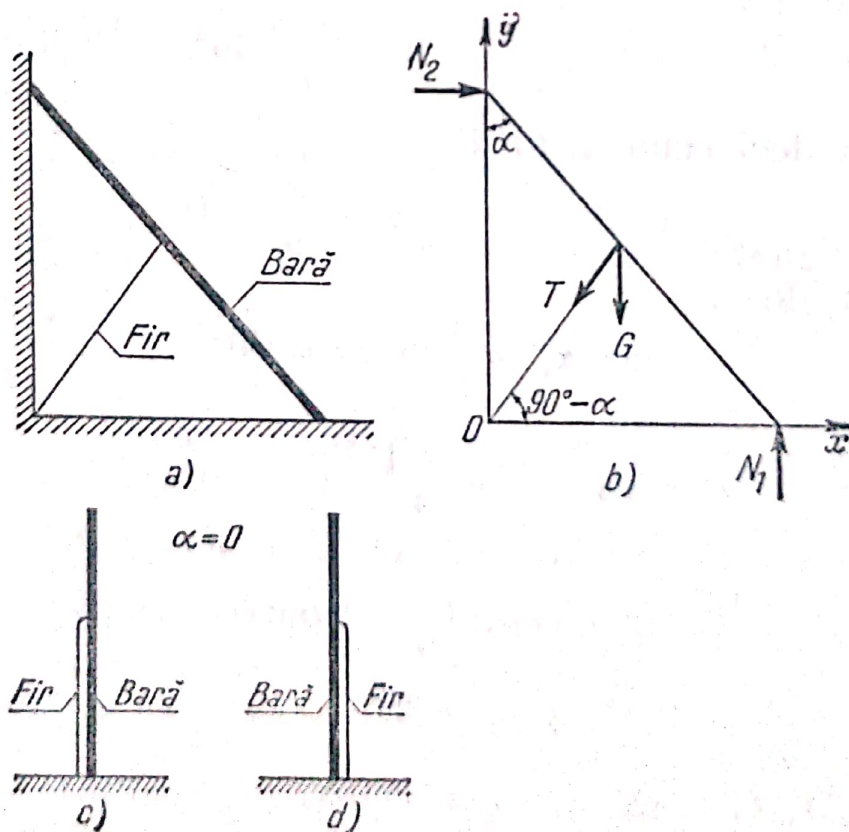


Fig. E 3.31

Înlocuind valorile lui N_1 și N_2 , deduse respectiv din cea de a doua și din prima ecuație, în cea de a treia ecuație, rezultă după simplificare cu l

$$(G + T \cos \alpha) \sin \alpha - T \sin \alpha \cos \alpha - \frac{G}{2} \sin \alpha = 0$$

adică

$$\frac{G}{2} \sin \alpha = 0.$$

Deoarece $G \neq 0$, rezultă

$$\sin \alpha = 0; \quad \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = \pi.$$

Cele două poziții de echilibru ale barei sînt arătate în figurile E 3.31, c și d. Deoarece tensiunea din fir T dispăre din ecuația de echilibru rezultă că ea poate avea orice valoare.

Observație. Din rezolvarea dată acestei probleme în lucrarea [7] nu rezultă cele două poziții de echilibru și nici concluzia privind tensiunea T din fir în poziția de echilibru. Spre exemplu, în poziția reprezentată în figura E 3.31, c bara nu cade. În această poziție reacțiunile au valorile

$$N_1 = G - T; \quad N_2 = 0; \quad T - \text{oarecare.}$$

E 3.32. Un automobil parcurge un arc de cerc cu raza $R = 50$ m. Coeficientul de frecare de alunecare laterală pe șosea este $\mu = 0,5$, distanța dintre roți $d = 1,5$ m, iar înălțimea centrului de greutate deasupra șoselei $h = 50$ cm. Se cere să se determine:

- Care este viteza la care apare alunecarea laterală a automobilului?
- La ce viteză se produce răsturnarea automobilului?
- Care din viteze este cea mai repede atinsă? Se va considera $g = 10 \text{ m/s}^2$. ([7], nr. 231).

Rezolvare. Vom folosi metoda echilibrului aplicată în dinamică; pentru aceasta vom adăuga la

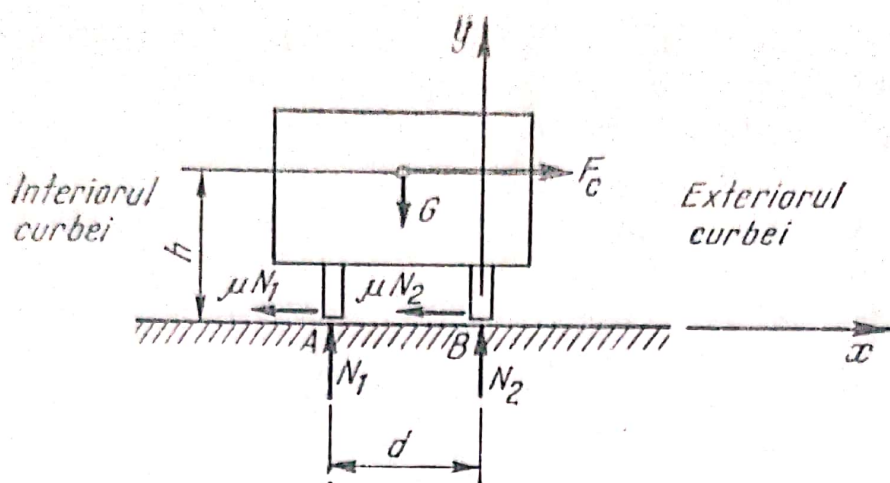


Fig. E 3.32

toate forțele ce acționează efectiv asupra automobilului și forța de inerție centrifugă (fig. E 3.32).

Considerînd planul median al automobilului, se observă că acesta este acționat de reacțiunile N_1 și N_2 ale șoselei asupra roților, forțele de frecare la limita de alunecare μN_1 și μN_2 , greutatea lui, G și forța de inerție centrifugă F_c .

Ecuațiile de echilibru dinamic față de sistemul de axe xOy sînt

$$(\sum F_x = 0) \quad F_c - \mu N_1 - \mu N_2 = 0$$

$$(\sum F_y = 0) \quad N_1 + N_2 - G = 0$$

$$(\sum M_B = 0) \quad -N_1 d - F_c h + G \frac{d}{2} = 0.$$

a) din primele două ecuații rezultă

$$F_c = \mu G$$

sau

$$m \frac{v_a^2}{R} = \mu mg$$

din care deducem că alunecarea se produce pentru

$$v_a \geq \sqrt{\mu g R} = 5 \sqrt{10} = 5 \times 3,16 = 15,8 \text{ m/s} = 56,9 \text{ km/oră.} \quad (1)$$

b) Răsturnarea se produce atunci cînd automobilul pierde contactul cu șoseaua în punctul A , deci cînd $N_1 \leq 0$.

Din ultima ecuație rezultă

$$N_1 = \frac{G}{2} - F_c \frac{h}{d}.$$

Punînd condiția de răsturnare pentru $v = v_r$, avem

$$\frac{mv_r^2}{R} \frac{h}{d} \geq \frac{mg}{2}$$

de unde

$$v_r \geq \sqrt{\frac{gRd}{2h}} = 27,4 \text{ m/s} = 98,6 \text{ km/oră.} \quad (2)$$

c) Prima dintre viteze este atinsă cel mai repede, deci riscul de alunecare este mai mare decît cel de răsturnare. Discuția se poate face și literal; alunecarea se produce întîi dacă este îndeplinită condiția

$$v_a < v_r$$

adică, ținînd seama de (1) și (2),

$$\mu g R < \frac{gRd}{2h}$$

sau

$$\mu < \frac{d}{2h}.$$

În cazul nostru avem

$$\mu = 0,5; \quad \frac{d}{2h} = \frac{150}{2 \times 50} = 1,5$$

deci primul fenomen care are loc este cel de alunecare.

E 3.33. O mică sferă electrizată, cu masa de 0,03 g, este plasată într-un câmp electric uniform, orizontal, de intensitate $5 \cdot 10^5 \text{ V/m}$. Ea este suspendată de un fir izolat, de masă neglijabilă, care ia o poziție de echilibru înclinată cu 30° față de verticală, în sensul câmpului. Care este sarcina electrică a sferei?

(Admitere în Term, liceul Molière, Paris, iunie 1967).

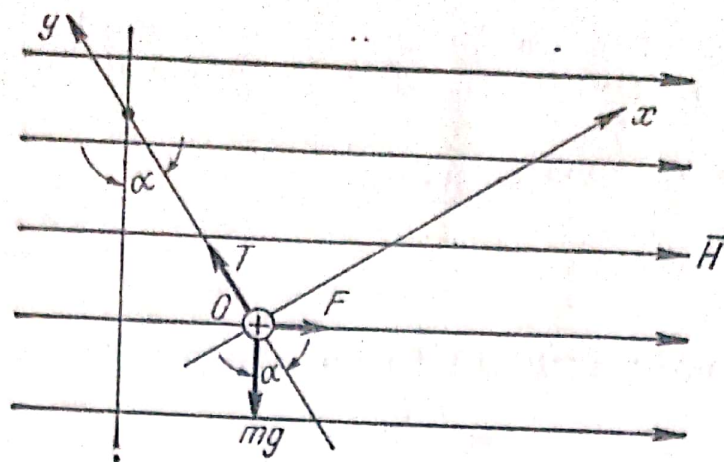


Fig. E 3.33

Rezolvare. Sfera este supusă acțiunii a trei forțe coplanare și concurente: tensiunea T din fir, greutatea sa mg și forța F de acțiune a câmpului electric; alegînd sistemul de axe din figura E 3.33 și scriind numai ecuația de echilibru pe axa Ox rezultă (3.26):

$$(\sum F_x = 0) \quad F \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0$$

de unde

$$F = mg \operatorname{tg} \alpha.$$

Ținînd seama că

$$F = EQ$$

deducem

$$Q = \frac{mg \operatorname{tg} \alpha}{E} = \frac{0,03 \times 10^{-3} \times 9,8 \times \sqrt{3}}{5 \times 10^5 \times 3} = 0,34 \times 10^{-9} \text{ C} = 0,34 \text{ nC}.$$

E 3.34. Fie două șine metalice paralele, așezate la distanța l una de alta, înclinate cu unghiul α față de orizontală, și care se termină cu o rezistență electrică R .

Pe aceste șine se găsește o bară de masă m așezată perpendicular pe ele. Bara cade prin lunecare pe planul înclinat format de șine păstrîndu-și perpendicularitatea. Ea cade cu viteza constantă v . Coeficientul de frecare dintre bară și șine este μ . Rezistența electrică a șinelor și barei este neglijabilă față de R . Bara se mișcă într-un câmp magnetic de inducție B , perpendicular pe planul orizontal și cu sensul în jos.

Presupunând că se cunosc l , α , R , m , B , μ , se cere să se găsească viteza constantă de cădere a barei pe planul înclinat și ce curent de inducție trece prin ea.

Aplicație numerică: $R = 4 \Omega$; $B = 2 \text{ T}$; $l = 1 \text{ m}$; $m = 0,2 \text{ kg}$; $\alpha = 30^\circ$; $\mu = 0,1$; $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Rezolvare. Schema ce rezultă din enunțul problemei este prezentată în figura E 3.34, a. Forțele care acționează asupra conductorului în cădere sînt reprezentate în figura E 3.34, b.

Pe această figură forța F este forța electromagnetică ce rezultă din acțiunea cîmpului magnetic asupra conductorului parcurs de curentul electric de inducție rezultat din mișcarea acestuia în cîmpul magnetic. Direcția acestei forțe este cea a perpendicularei pe planul format de vectorul ce reprezintă inducția și conductor.

Sensul se obține cu ajutorul regulii triedrului, rotindu-se un burghiu în sensul necesar, pentru ca vectorul avînd orientarea intensității curentului să se suprapună

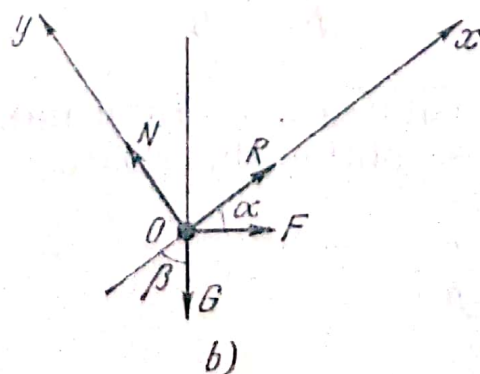
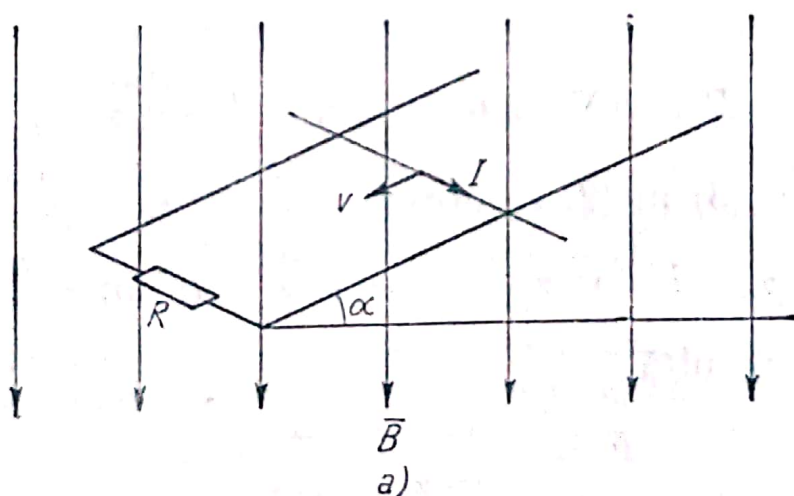


Fig. E 3.34

pe drumul cel mai scurt, peste vectorul inducție, burghiul înaintînd în sensul vectorului forță. N este reacțiunea normală pe suprafața planului înclinat, iar $R = \mu N$ este forța de frecare. F și N sînt cele două necunoscute ale problemei.

Se alege originea axelor de coordonate pe axa conductorului, axa Oy fiind îndreptată pe direcția forței N și axa Ox pe direcția forței de frecare.

Scriind ecuațiile de echilibru ce rezultă din egalarea cu zero a sumei proiecțiilor tuturor forțelor pe cele două axe rezultă [v. (3.26)]

$$(\sum F_y = 0) \quad N - G \cos \alpha - F \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$(\sum F_x = 0) \quad -G \sin \alpha + F \cos \alpha + R = 0. \quad (2)$$

Din (1) rezultă

$$N = G \cos \alpha + F \sin \alpha$$

și deci

$$R = \mu N = \mu(G \cos \alpha + F \sin \alpha). \quad (3)$$

Înlocuind (3) în (2) se obține

$$-G \sin \alpha + F \cos \alpha + \mu(G \cos \alpha + F \sin \alpha) = 0 \quad (4)$$

de unde rezultă

$$F = \frac{G(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}. \quad (5)$$

Dar

$$F = Bil$$

unde i este intensitatea curentului indus în conductor, a cărei valoare se obține din relația

$$i = \frac{e}{R} = \frac{Blv}{R} \sin \beta = \frac{Blv}{R} \cos \alpha.$$

Deci

$$F = Bil = \frac{B^2 l^2}{R} v \cos \alpha. \quad (6)$$

Înlocuind (5) cu (6) rezultă

$$v = \frac{GR}{B^2 l^2} \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} =$$

$$= \frac{0,2 \times 10 \times 4}{4 \times 1 \times 0,865} \frac{0,5 - 0,0865}{0,865 + 0,05} = 1,05 \text{ m/s}$$

iar

$$i = \frac{Blv}{R} \cos \alpha = \frac{2 \times 1 \times 1,05}{4} 0,865 = 0,455 \text{ A.}$$

3.9. Metoda centrului maselor

3.9.1. Principiul metodei; domeniu de aplicabilitate.

Metoda centrului maselor oferă posibilitatea determinării centrelor de greutate ale corpurilor compuse din corpuri simple ale căror centre de greutate sînt cunoscute, folosind în locul forțelor de greutate și a regulii momentelor cîteva relații simple care conțin numai mase și coordonate față de un sistem de referință ales arbitrar.

3.9.2. Noțiuni de bază; definiții; notații; relații.

Fiind date mai multe mase $m_1, m_2, \dots, m_n$ așezate în punctele $M_1, M_2, \dots, M_n$ din spațiu care au față de un sistem de referință $Oxyz$ respectiv coordonatele $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ se definește ca fiind *centrul maselor* sau *centrul de greutate* un punct C ale cărui coordonate față de același sistem de referință sînt

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

$$y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i y_i}{M} \quad (3.29)$$

$$z_C = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

în care $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum m_i$ reprezintă masa totală.

Acest punct se bucură de o serie de proprietăți dintre care cele mai importante sînt următoarele:

a) poziția sa în raport cu punctele $M_1, M_2, \dots, M_n$ este aceeași orice sistem de referință am alege;

b) poziția sa în raport cu punctele $M_1, M_2, \dots, M_n$ rămîne aceeași oricum am roti sau translată tot ansamblul punctelor legate ca un rigid.

c) poziția sa coincide cu aceea a centrului de greutate al maselor considerate, fapt care se poate vedea ușor din relațiile (3.29); într-adevăr, amplificînd atît numărătorul cît și numitorul acestor relații cu accelerația gravitației g se observă ușor că aceste relații nu reprezintă altceva decît teorema momentelor aplicată sistemului considerat.

Această ultimă proprietate permite calculul poziției centrului de greutate fără a mai lua în considerație forțele gravitaționale ce acționează corpurile, ținînd seama numai de masele și coordonatele punctelor în care ele se află.

Pentru un corp care poate fi descompus în mai multe părți masele $m_1, m_2, \dots, m_n$ reprezintă masele fiecăreia din părțile în care a fost descompus corpul inițial, considerate ca fiind așezate în centrele de greutate ale corpurilor componente ($C_1 \equiv M_1, C_2 \equiv M_2, \dots, C_n \equiv M_n$); prin aplicarea formulelor (3.29) se determină centrul maselor adică centrul de greutate al corpului inițial.

Considerăm că aceasta este o cale mult mai simplă și mai sigură întrucît ea face apel numai la cunoștințele de algebră și eventual de geometrie analitică (reprezentarea unor puncte în raport cu un sistem de referință și aflarea coordonatelor lor în raport cu acest sistem).

3.9.3. Ecuațiile metodei. Această metodă folosește ca ecuații numai relațiile (3.29).

3.9.4. Programul metodei. Operațiile programului acestei metode sînt arătate în fig. 3.21; ele sînt:

a) Se reprezintă corpul inițial ale cărui formă și dimensiuni sînt date, în enunțul problemei respective. El poate fi un corp unidimensional, bidimensional sau tridimensional.

b) Se descompune corpul inițial în corpuri simple ale căror centre de greutate sînt cunoscute.

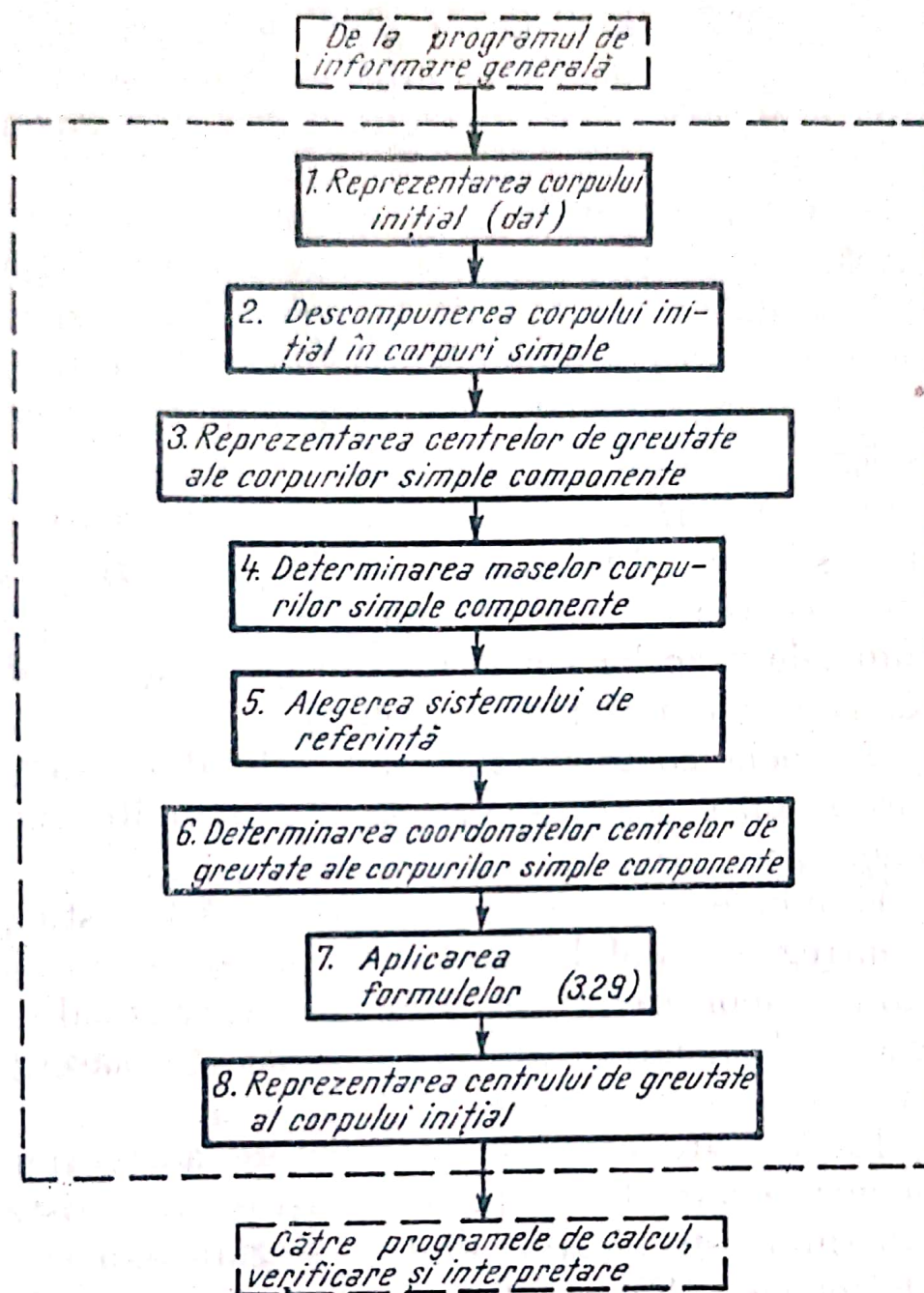


Fig. 3.21

c) Se reprezintă centrele de greutate ale tuturor corpurilor simple în care a fost descompus corpul inițial.

d) Se determină, folosind datele problemei, masele tuturor corpurilor simple în care a fost descompus corpul inițial.

e) Se alege sistemul de referință la care se raportează întreaga figură, ținând seama de poziția reciprocă a centrelor de greutate ale figurilor simple componente.

f) Față de sistemul de referință ales la punctul precedent se determină și se înscriu pe figură coordonatele tuturor centrelor de greutate ale corpurilor componente ale sistemului inițial.

g) Se aplică formulele (3.29) determinînd astfel coordonatele centrului de greutate ale corpului inițial.

h) Folosind rezultatele de la punctul precedent, se reprezintă pe aceeași figură centrul de greutate al corpului inițial, operație cu care problema respectivă se consideră rezolvată.

3.9.5. *Indicații și precizări.* a) Prin convenție vom atribui semnul plus maselor acelor corpuri care se adaugă celorlalte corpuri ale sistemului inițial și semnul minus acelor corpuri care se scad sau se decupează din sistemul inițial (goluri).

b) Semnele coordonatelor sînt cele din geometria analitică; între aceste semne și cele atribuite maselor sistemului nu există nici o legătură.

c) Este bine ca sistemul de referință să fie astfel ales încît întreg sistemul de mase să fie plasat în cadranul I (în afara unor cazuri speciale); în acest mod toate coordonatele punctelor în care sînt plasate masele sînt pozitive.

d) Dacă toate centrele de greutate ale corpurilor componente sînt plasate pe o aceeași dreaptă sistemul de referință este alcătuit dintr-o singură axă Ox , iar din formulele (3.29) se folosește numai prima.

e) Dacă toate centrele de greutate ale corpurilor componente sînt plasate în același plan, sistemul de referință este alcătuit din două axe, iar din formulele (3.29) se folosesc numai primele două;

f) Dacă toate centrele de greutate ale corpurilor componente se află în spațiu, sistemul de referință are trei axe, iar formulele (3.29) se folosesc toate trei;

g) Dacă centrele de greutate ale corpurilor componente admit o axă sau un plan de simetrie, axa sau planul respectiv se alege drept axă respectiv plan de

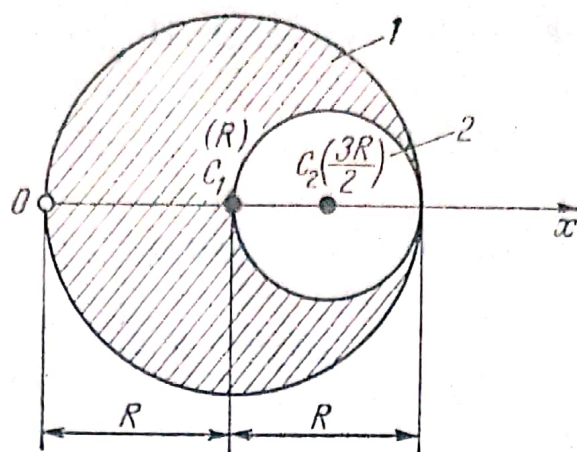


Fig. E 3.35

simetrie al sistemului de referință, celelalte coordonate (una sau două) fiind nule.

h) Se reamintește faptul că orice corp supus numai acțiunii greutății sale și susținut în centrul său de masă se află în echilibru indiferent.

3.9.6. Exemple de aplicare a metodei

E 3.35. Se cere să se găsească poziția centrului de greutate al unui disc din tablă de fier de rază R , prezentând o gaură de diametru R tangentă discului. [7]

Rezolvare. Corpul dat este reprezentat în fig. E 3.35. El se descompune în două corpuri și anume cercul plin 1 de rază R și cercul gol 2 de diametru R , având centre de greutate C_1 și C_2 cunoscute (centrele lor).

Masele celor două corpuri în care a fost descompus corpul inițial sînt

$$m_1 = \rho h \pi R^2 \text{ (plin)}$$

$$m_2 = - \rho h \frac{\pi R^2}{4} \text{ (gol)}$$

în care ρ și h reprezintă respectiv masa specifică a fierului și grosimea plăcii de fier presupusă aceeași în toate punctele sale.

Sistemul de referință este alcătuit numai din axa Ox deoarece cele două centre se află pe această axă.

Coordonatele celor două centre de greutate au valorile

$$x_1 = R, \quad x_2 = \frac{3R}{2}.$$

Aplicînd formulele (3.19) obținem

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\rho h \pi R^2 \cdot R - \rho h \frac{\pi R^2}{4} \cdot \frac{3R}{2}}{\rho h \pi R^2 - \rho h \frac{\pi R^2}{4}} = \\ &= \frac{R^3 - \frac{3}{8} R^3}{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{\frac{5}{8} R^3}{\frac{3}{4} R^2} = \frac{5}{3} R = 0,83 R. \end{aligned}$$

E 3.36. Se consideră că patru particule de mase $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 4$ kg, $m_3 = 5$ kg și $m_4 = 18$ kg sînt plasate ca în fig. E 3.36 în vîrfurile unui pătrat. Se cere să se determine distanța dintre centrul de greutate C al sistemului și centrul O al patraturului [7].

Rezolvare. Corpurile din care este alcătuit sistemul sînt masele m_1, m_2, m_3 și m_4 care — datorită faptului că sînt considerate punctiforme — reprezintă totodată și propriile lor centre de masă.

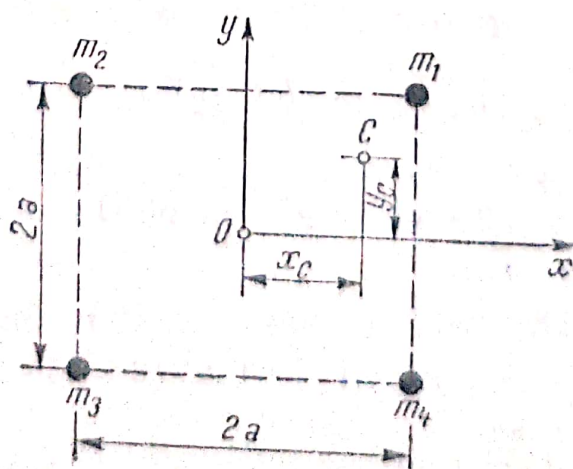


Fig. E 3.36

Sistemul de referință la care se raportează cele patru mase este sistemul xOy . Notînd cu $2a$ latura pătratului coordonatele celor patru mase au valorile

$$m_1 \begin{cases} x_1 = a \\ y_1 = a \end{cases}; \quad m_2 \begin{cases} x_2 = -a \\ y_2 = a \end{cases}; \quad m_3 \begin{cases} x_3 = -a \\ y_3 = -a \end{cases};$$

$$m_4 \begin{cases} x_4 = a \\ y_4 = -a \end{cases}.$$

Aplicînd formulele (3.29) obținem

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \\ &= \frac{3a - 4a - 5a + 18a}{3 + 4 + 5 + 18} = \frac{12}{30} a = \frac{2}{5} a = 0,4 a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \\ &= \frac{3a + 4a - 5a - 18a}{3 + 4 + 5 + 18} = -\frac{16}{30} a = -\frac{8}{15} a = -0,53 a. \end{aligned}$$

Distanța cerută are valoarea

$$d = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = a \sqrt{0,4^2 + 0,53^2} = 0,66 a.$$

E 3.37. Se dă o placă omogenă în formă de triunghi. Considerînd pe mediana AD un punct X se înlătură porțiunea BCX din placă. Se cere să se determine:

- centrul de greutate al porțiunii rămase $ABXC$;
- poziția punctului X astfel încît centrul de greutate al porțiunii $ABXC$ să se afle în punctul X .

Rezolvare. a) Corpul de care ne ocupăm este reprezentat în fig. E 3.37; el este descompus în două triunghiuri și anume: triunghiul plin ABC și triunghiul gol (decupat) BXC , din „adunarea” căroră rezultă figura $ABXC$. Centrele de greutate ale acestor trei

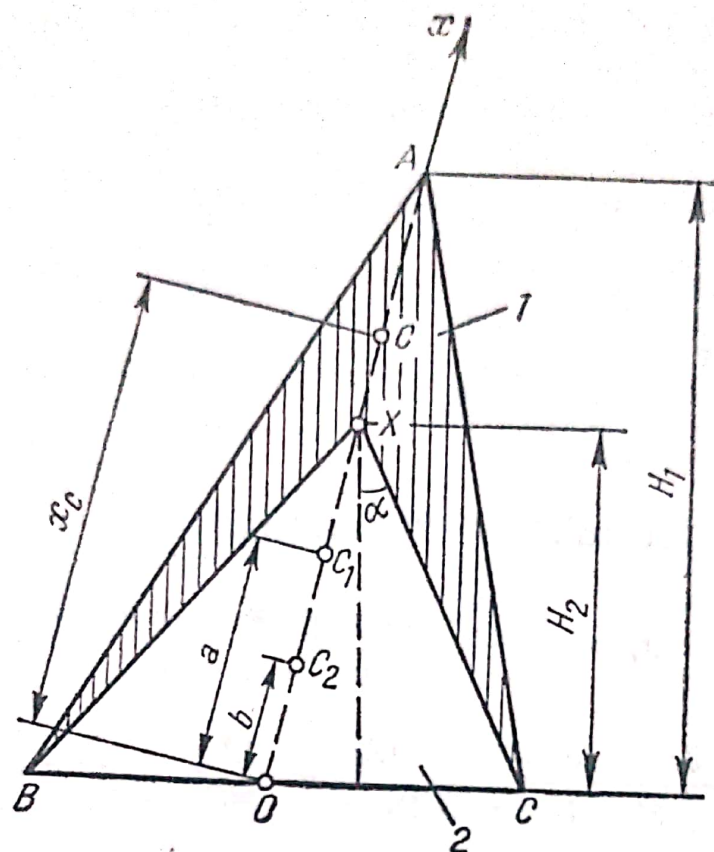


Fig. E 3.37

corpuri sînt respectiv C_1 , C_2 și C , ultimul fiind situat pe dreapta care le unește pe primele două.

Masele corpurilor componente au valorile $m_1 = \rho h \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot H_1$; $m_2 = -\rho h \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot H_2$, în care ρ și h reprezintă respectiv densitatea materialului din care este confecționată placa și grosimea acestuia, iar H_1 și H_2 înălțimile triunghiurilor ABC și BXC .

Sistemul de referință ales este alcătuit numai din axa Ox ; față de acest sistem centrele de greutate C_1 , C_2 și C au respectiv coordonatele a , b , și x_C

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\rho h \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot H_1 a - \rho h \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot H_2 b}{\rho h \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot H_1 - \rho h \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot H_2} = \\ &= \frac{H_1 a - H_2 b}{H_1 - H_2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Dacă se notează cu α unghiul dintre Ox și perpendiculara pe $\overline{BC}$ avem

$$H_2 = OX \cos \alpha; H_1 = OA \cos \alpha \quad (2)$$

$$b = \frac{1}{3} OX, \quad a = \frac{1}{3} OA$$

deci

$$H_2 = 3b \cos \alpha, H_1 = 3a \cos \alpha$$

cu care relația (1) devine

$$x_C = \frac{3a^2 \cos \alpha - 3b^2 \cos \alpha}{3a \cos \alpha - 3b \cos \alpha} = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b.$$

b) În acest caz trebuie să avem

$$x_C = OX \Rightarrow a + b = 3b \Rightarrow a = 2b.$$

Ținând seama de relațiile (2) rezultă

$$\frac{1}{3} OA = \frac{2}{3} OX \Rightarrow OX = \frac{OA}{2},$$

adică punctul X trebuie să se afle la jumătatea lui OA .

3.10. Metoda pentru studiul oscilațiilor

3.10.1. Principiul metodei; domeniu de aplicabilitate.

În fizică se întâlnesc adeseori corpuri care execută mișcări rectilinii oscilatorii armonice (oscilator liniar); în asemenea situații trebuie efectuat un studiu cinematic și dinamic al mișcării respective.

Studiul cinematic se efectuează cu ajutorul metodei ecuațiilor de mișcare; nu am mai insistat asupra lui deoarece în cazul acestei mișcări rectilinii nu apar elemente noi față de cele prezentate la metoda respectivă. (§ 3.1).

Studiul dinamic se efectuează cu ajutorul metodei $m\ddot{a} = \bar{F}$. Deoarece la aplicarea acestei metode pentru studiul dinamic al oscilatorului liniar apar unele ele-

mente noi, prezentăm în cele ce urmează o metodică specială de studiu a acestui tip de probleme.

3.10.2. *Noțiuni de bază; definiții; notații; relații.* O mișcare rectilinie oscilatorie armonică este descrisă de oricare din următoarele ecuații echivalente

$$\begin{aligned}x &= A \sin (\omega t + \varphi) \\x &= A \sin (\omega t - \varphi) \\x &= A \cos (\omega t + \varphi) \\x &= A \cos (\omega t - \varphi)\end{aligned}\tag{3.30}$$

în care mărimile din aceste relații reprezintă: x — abscisa mobilului la un moment dat, denumită în cazul acestui tip de mișcare și *elongație*, măsurată de la un punct fix denumit *centru de oscilație*, care se alege de regulă poziția de echilibru static al mobilului (m); A — amplitudinea mișcării, ce reprezintă valoarea maximă a elongației (m); ω — pulsația sau viteza unghiulară a mișcării oscilatorii respective (s^{-1}); t — momentul la care se calculează elongația (s); φ — faza mișcării (rad).

Pentru o mișcare dată, mărimile A , ω și φ sînt constante, iar x și t variabile.

O mișcare oscilatorie se consideră cunoscută atunci cînd sînt cunoscute mărimile A , ω și φ ,

Cunoscînd valoarea pulsației se mai pot determina două mărimi importante în studiul mișcării oscilatorii și anume:

- perioada mișcării $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (s);
- frecvența mișcării $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ (Hz).

Orice mișcare oscilatorie se bucură de proprietatea că accelerația mobilului este în tot timpul mișcării proporțională cu abscisa sa și de semn contrar acesteia, coeficientul de proporționalitate fiind chiar pătratul pulsației mișcării; într-adevăr, folosind spre exemplu

prima ecuație care descrie mișcarea oscilatorie, obținem prin derivări succesive

$$\begin{aligned}x &= A \sin (\omega t + \varphi) \\v &= A \omega \cos (\omega t + \varphi) \\a &= -A \omega^2 \sin (\omega t + \varphi) = -\omega^2 x.\end{aligned}\quad (3.31)$$

Acceași afirmație rămâne valabilă și pentru celelalte ecuații.

În anumite probleme nu se dau mărimile A și φ ci coordonata inițială x_0 și viteza inițială v_0 (la momentul $t = 0$); în acest caz trebuie determinate expresiile

$$\begin{aligned}A &= A(x_0, v_0, \omega) \\ \varphi &= \varphi(x_0, v_0, \omega).\end{aligned}$$

Procedeul este următorul: se consideră una din ecuațiile care descriu această mișcare, spre exemplu

$$x = A \sin (\omega t + \varphi)$$

din care rezultă prin derivare viteza mobilului

$$v = A \omega \cos (\omega t + \varphi).$$

Punînd condițiile:

- pentru $t = 0$, $x = x_0$ rezultă $x_0 = A \sin \varphi$;
 - pentru $t = 0$, $v = v_0$ rezultă $v_0 = A \omega \cos \varphi$,
- care alcătuiesc un sistem de două ecuații cu necunoscutele A și φ ; prin rezolvare se obține

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad (3.32)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_0 \omega}{v_0}.$$

Problema fundamentală a dinamicii oscilatorului liniar constă în determinarea pulsației ω a acestuia. Alte mărimi dinamice care interesează la studiul oscilatorului liniar sînt:

$$\text{— energia cinetică } E = \frac{1}{2} m v^2 \quad (3.33)$$

$$\text{— energia potențială } \Pi = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

care sînt mărimi variabile în timp.

Oscilatorul liniar fără frecări constituind un sistem conservativ, rezultă că avem

$$E + \Pi = \text{constant.}$$

Într-adevăr, folosind prima ecuație care descrie mișcarea oscilatorie avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m [A \omega \cos (\omega t + \varphi)]^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 [A \sin (\omega t + \varphi)]^2 = \\ = m A^2 \omega^2 = \text{constant} = E_m \end{aligned}$$

unde E_m este energia mecanică a oscilatorului

$$E + \Pi = E_m = m A^2 \omega^2. \quad (3.34)$$

3.10.3. Ecuațiile metodei. Metoda de studiu a oscilatorului liniar are la bază ecuația fundamentală a dinamicii proiectată pe axa Ox , aleasă pe direcția mișcării corpului care oscilează

$$m a_x = F_x$$

la care se ține seama de relația

$$a_x = -\omega^2 x.$$

Eliminînd între aceste relații proiecția a_x a accelerației mobilului pe axa Ox , rezultă

$$\omega = \sqrt{-\frac{F_x}{mx}}. \quad (3.35)$$

3.10.4. Programul metodei. Operațiile programului acestei metode sînt arătate pe figura 3.22, ele sînt:

a) Se precizează corpul de care ne ocupăm (corpul care oscilează).

b) Se reprezintă corpul de care ne ocupăm în poziția de echilibru static.

c) Se alege axa Ox pe direcția mișcării corpului; originea O a axei se alege în poziția de echilibru static și orientarea în unul din cele două sensuri pe direcția mișcării corpului.

d) Se reprezintă toate forțele care acționează corpul în poziția de echilibru static (exclusiv forțele de inerție).

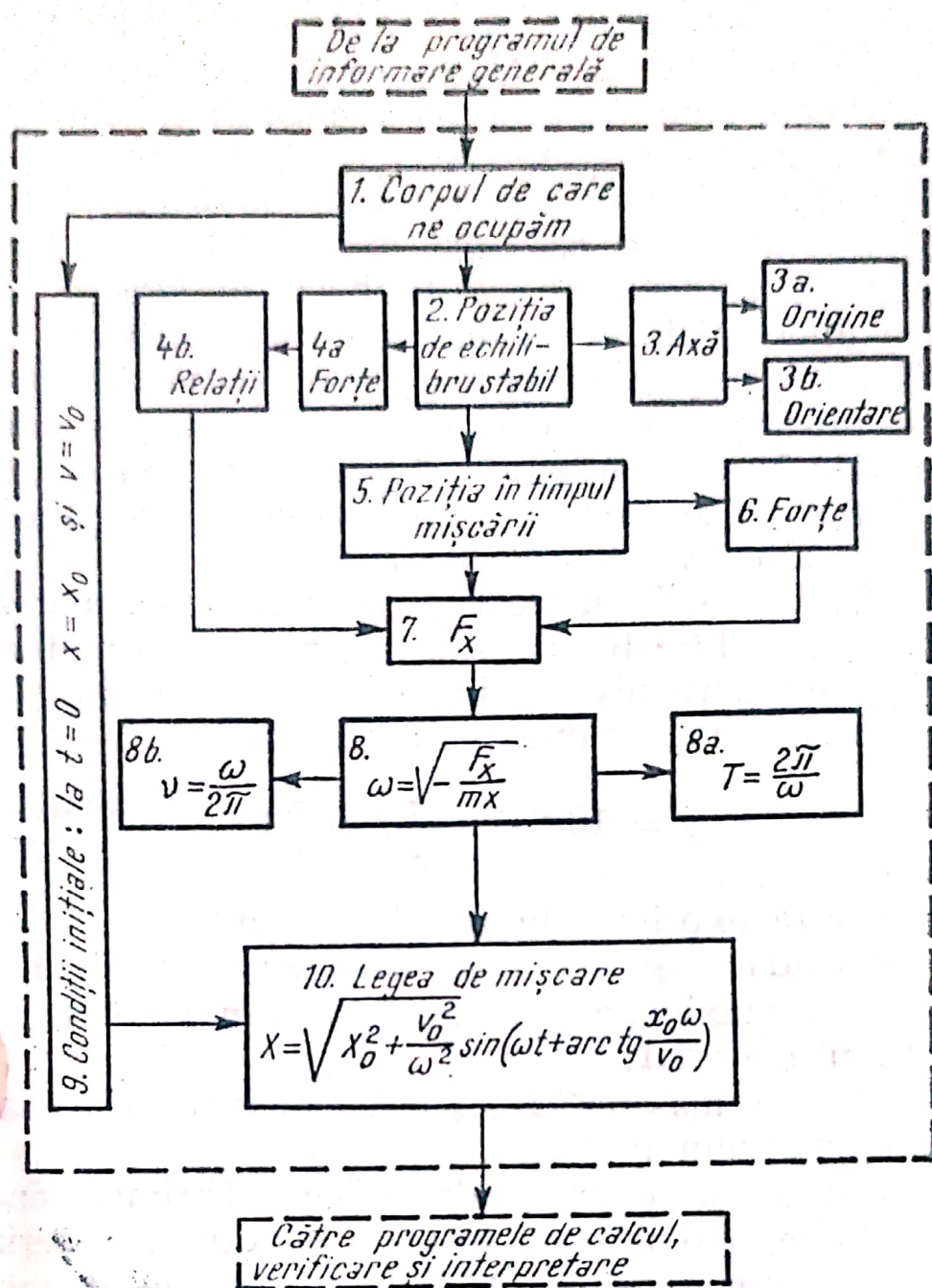


Fig. 3.22

Se scriu relațiile care exprimă echilibrul forțelor care acționează asupra corpului în această poziție.

e) Se reprezintă corpul într-o poziție oarecare din timpul mișcării situată pe partea pozitivă a axei.

f) Se reprezintă toate forțele care acționează asupra corpului în poziția oarecare din timpul mișcării.

g) Se calculează F_x (suma proiecțiilor tuturor forțelor ce acționează asupra corpului în poziția oarecare din timpul mișcării) ținând seama și de relațiile obținute la punctul d).

h) Se determină pulsația ω a oscilatorului studiat; cu ajutorul ei se determină perioada T și frecvența ν .

i) Se determină din enunțul problemei condițiile inițiale x_0 și v_0 .

j) Se scrie legea de mișcare a oscilatorului.

3.10.5. Indicații și precizări. Este de observat faptul că metoda prezentată are la bază integrarea unei ecuații diferențiale de ordinul doi cu coeficienți constanți; calculele prezentate mai sus constituie rezultatul acestei integrări. Dacă se urmăresc cu strictețe operațiile indicate în acest program se obține pe calea cea mai scurtă ecuația de mișcare a oscilatorului liniar studiat.

3.10.6. Exemple de aplicare a metodei

E 3.38. Un oscilator alcătuit dintr-un punct material de masă $m = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$, atârnată la capătul unui arc, se mișcă sub acțiunea forței elastice a arcului și a greutateii masei, ecuația elongației avînd forma

$$y = 10^{-1} \sin \left(\frac{\pi}{8} t + \frac{\pi}{8} \right)$$

unde y este exprimat în metri. Se cer:

- a) perioada T și frecvența oscilației;
- b) viteza maximă $v_{\max}$ și accelerația maximă $a_{\max}$ a punctului material;
- c) valoarea maximă $F_{\max}$ a forței care acționează asupra punctului material;
- d) relațiile care exprimă dependența de timp a energiei cinetice, potențiale și totale a punctului material;
- e) intervalul de timp Δt în care punctul material execută drumul de la jumătatea amplitudinii la $\frac{3}{2}$ din amplitudine.

(Institutul Politehnic București — ingineri, septembrie 1971).

Rezolvare. Comparînd ecuația dată cu ecuațiile generale ale unei oscilații [v. (3.30)]

$$y = A \sin (\omega t + \varphi)$$

$$v = A \omega \cos (\omega t + \varphi)$$

$$a = -A \omega^2 \sin (\omega t + \varphi) = -\omega^2 y$$

rezultă:

a) Amplitudinea: $A = 10^{-1} \text{ m}$

Pulsația: $\omega = \frac{\pi}{8} = 3,925 \cdot 10^{-1} \text{ s}^{-1}$

Faza: $\varphi = \frac{\pi}{8}$

Perioada: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}} = 16 \text{ s}$

Frecvența: $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{16} = 6,25 \cdot 10^{-2} \text{ Hz}$.

b) Viteza maximă:

$$v_{\max} = A\omega = 10^{-1} \frac{\pi}{8} = 3,925 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

Accelerația maximă:

$$a_{\max} = A\omega^2 = 10^{-1} \left(\frac{\pi}{8}\right)^2 = 1,54 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2.$$

c) Forța maximă:

$$F_{\max} = ma_{\max} = 1,6 \times 10^{-2} \times 1,54 \times 10^{-2} = 2,46 \cdot 10^{-4} \text{ N}.$$

d) Energia cinetică [v. (3.32)]:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} \times 1,6 \times \\ &\times 10^{-2} (3,925 \times 10^{-2})^2 \times 10^{-2} \cos^2\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{8}\right) = \\ &= 1,232 \cdot 10^{-7} \cos^2\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{8}\right). \end{aligned}$$

Energia potențială [v. (3.32)]:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} \times 1,6 \times \\ &\times 10^{-2} (3,925 \times 10^{-2})^2 \times 10^{-2} \sin^2\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{8}\right) = \\ &= 1,232 \times 10^{-7} \sin^2\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{8}\right). \end{aligned}$$

Energia totală [v. (3.33)]:

$$E_t = E_m = E + \Pi = 1,232 \cdot 10^{-7} \text{ J.}$$

e) Intervalul de timp cerut se determină astfel:

$$\text{la } t = t_1, y = \frac{A}{2}; \text{ la } t = t_2, y = \frac{\sqrt{3}}{2}A$$

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

Rezultă în primul caz

$$\frac{A}{2} = A \sin(\omega t_1 + \varphi) \Rightarrow \sin(\omega t_1 + \varphi) = 0,5$$

deci

$$\omega t_1 + \varphi = \arcsin 0,5 \Rightarrow t_1 = \frac{\arcsin 0,5 - \varphi}{\omega}$$

adică

$$t_1 = \frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{3} \text{ s.}$$

În cel de al doilea caz

$$\frac{A\sqrt{3}}{2} = A \sin(\omega t_2 + \varphi) \Rightarrow t_2 = \frac{\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \varphi}{\omega}$$

adică

$$t_2 = \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{8}} = \frac{5}{3} \text{ s}$$

deci

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = 1,33 \text{ s.}$$

E. 3.39. Se consideră un tub în formă de U, avînd secțiunea constantă S , în care se găsește un lichid de densitate ρ avînd lungimea coloanei sale pe axă egală cu l (fig. E 3.39).

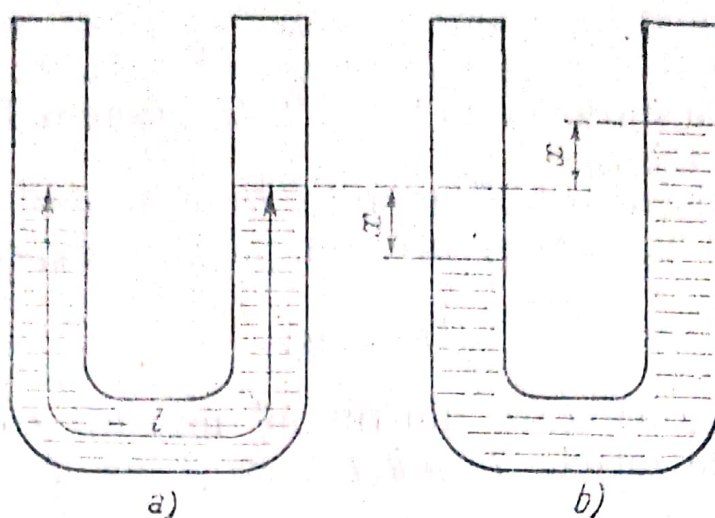


Fig. E 3.39

Se cere să se determine pulsația micilor oscilații ale acestei coloane de lichid.

Rezolvare. Corpul de care ne ocupăm este coloana de lichid din fig. E 3.39, a reprezentată în poziție de echilibru static, iar în fig. E 3.39, b într-o poziție oarecare din timpul mișcării.

Nu există relații importante pentru calcul în poziția de echilibru static.

În poziția oarecare forța care acționează asupra coloanei este dată de greutatea coloanei de lichid din dreapta situată peste planul orizontal al suprafeței libere a coloanei din stânga, adică

$$F_x = -2\rho Sxg.$$

Ținând seama că masa întregii coloane este $m = \rho Sl$ rezultă [v. (3.35)]

$$\omega = \sqrt{-\frac{F_x}{mx}} = \sqrt{-\frac{-2\rho Sxg}{\rho Slx}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

E 3.40. Se cere să se determine pulsația mișcării unui oscilator linear alcătuit dintr-o masă m și un arc de constantă elastică k ce se deplasează pe verticală, să se scrie ecuația de mișcare a masei și să se determine perioada și frecvența mișcării.

Rezolvare. Corpul de care ne ocupăm este masa m .

În fig. E 3.40, a este reprezentat arcul neîntins, în fig. E 3.40, b — reprezentat sistemul masă-arc în poziția de echilibru static, iar în fig. E 3.40, c sistemul masă-arc în timpul mișcării.

În poziția de echilibru static masa m este acționată de forțele $T_0 = kf$ și mg ; relația care exprimă echilibrul este

$$kf = mg. \quad (1)$$

În poziția oarecare din timpul mișcării corpul este acționat de forțele $T = k(f + x)$ și mg . Avem

$$F_x = mg - T = mg - k(f + x).$$

Ținând seama și de relația (1) rezultă

$$F_x = -kx$$

Pulsația mișcării are valoarea [v. (3.35)]

$$\omega = \sqrt{-\frac{F_x}{mx}} = \sqrt{-\frac{-kx}{mx}} = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

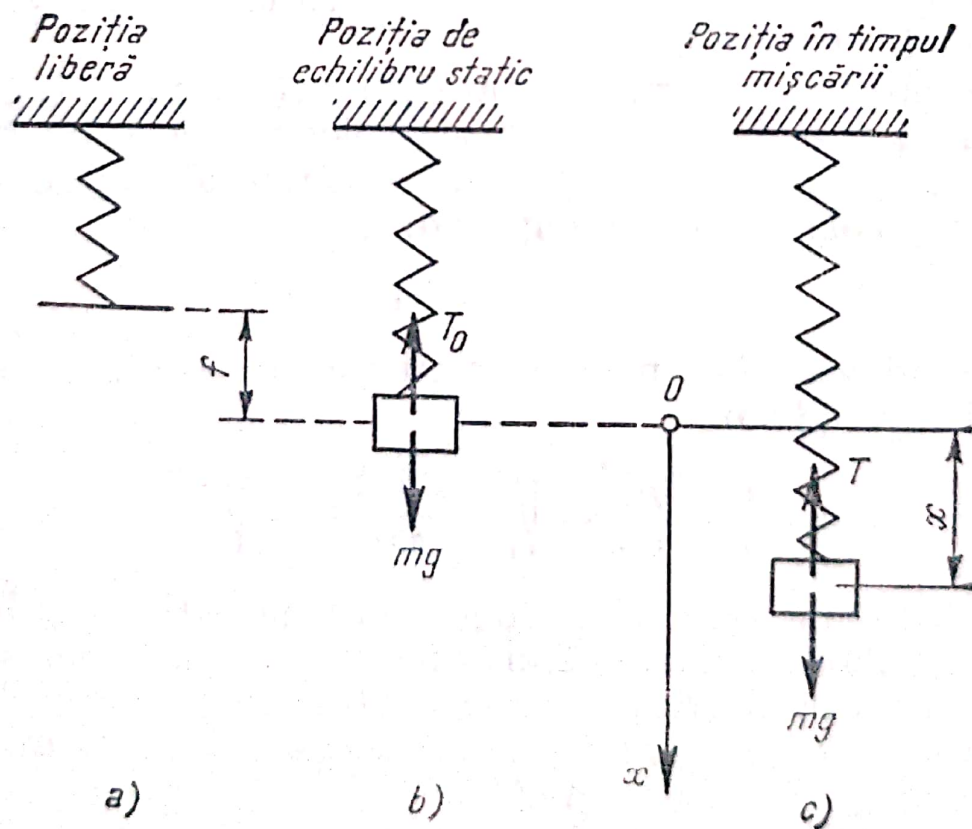


Fig. E 3.40

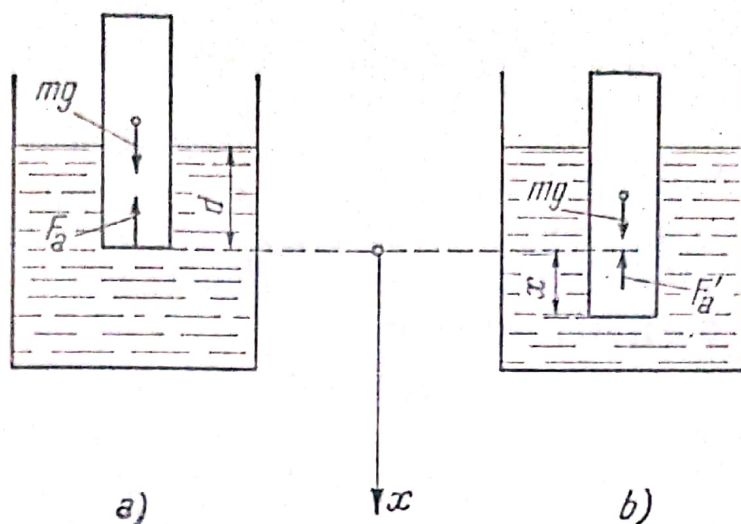


Fig. E 3.41

Ecuatia de mișcare a masei ținând seama de condițiile inițiale este [v. (3.32)]

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{mv_0^2}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \arctg \frac{x_0}{v_0} \sqrt{\frac{k}{m}} \right).$$

Mai avem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}; \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Se poate arăta că se obțin aceleași rezultate și în cazul în care oscilatorul este așezat pe o masă orizontală fără frecări.

E 3.41. Se cere să se determine pulsația micilor oscilații ale unui oscilator liniar alcătuit dintr-un cilindru de secțiune S înălțime h și densitate ρ_c introdus vertical într-un lichid de densitate ρ_l .

Se neglijează frecările, iar nivelul lichidului se presupune constant în timpul mișcării cilindrului. Se va scrie și ecuația de mișcare a cilindrului, perioada și frecvența mișcării.

Rezolvare. Corpul de care ne ocupăm este cilindrul.

În fig. E 3.41, a s-a reprezentat cilindrul în poziția de echilibru static, iar în fig. E 3.41, b el este reprezentat într-o poziție oarecare în timpul mișcării.

În poziția de echilibru static cilindrul care se afundă în lichid cu cantitatea d este acționat de următoarele forțe:

- greutatea sa $mg = \rho_c Shg$;
- forța arhimedică $F_a = \rho_l Sdg$.

Relația de echilibru este

$$mg = F_a$$

adică

$$\rho_c h = \rho_l d.$$

În poziția oarecare din timpul mișcării cilindrul este acționat de următoarele forțe:

- greutatea sa $mg = \rho_c Shg$;
- forța arhimedică $F'_a = \rho_l S(d + x)g$.

Avem

$$\begin{aligned} F_x &= mg - F'_a = \rho_c Shg - \rho_l S(d + x)g \\ &= Sg(\rho_c h - \rho_l d - \rho_l x) \end{aligned}$$

Ținînd seama de relația de echilibru rezultă

$$F_x = \rho_l Sgx.$$

Pulsația mișcării are valoarea [v. (3.35)]

$$\omega = \sqrt{-\frac{F_x}{mx}} = \sqrt{-\frac{\rho_l Sgx}{\rho_c Shx}} = \sqrt{\frac{\rho_l g}{\rho_c h}}.$$

Ecuția de mișcare ținînd seama de condițiile inițiale este [v. (3.31)]

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{\rho_c h v_0^2}{\rho_l g}} \sin \left(\sqrt{\frac{\rho_l g}{\rho_c h}} t + \arctg \frac{x_0}{v_0} \sqrt{\frac{\rho_l g}{\rho_c h}} \right).$$

Mai avem

$$T = 2 \sqrt{\frac{\rho_c h}{\rho_l g}}; \quad v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_l g}{\rho_c h}}.$$

E 3.42. Se cere să se determine pulsația micilor oscilații ale unui oscilator liniar alcătuit dintr-un piston

de masă m ce oscilează la mijlocul unui cilindru de lungime $2l$ și secțiune S , închis la ambele capete, neglijând frecările.

Se va presupune că presiunea inițială în ambele compartimente este p_0 și că în timpul mișcării ambele cantități de gaze suferă transformări izotermice.

Se cere să se scrie și ecuația de mișcare a pistonului, perioada și frecvența mișcării.

Rezolvare. Corpul de care ne ocupăm este pistonul. În fig. E 3.42, a s-a reprezentat pistonul în poziția de echilibru static, iar în fig. E 3.42, b el este reprezentat într-o poziție oarecare din timpul mișcării.

În poziția de echilibru static pistonul este acționat pe fața din stînga de forța $p_0 S$, pe fața din dreapta de forța $p_0 S$, de greutatea sa mg și de reacțiunea normală N din punctul de sprijin pe cilindru; relațiile de echilibru sînt

$$p_0 S - p_0 S = 0; N - mg = 0.$$

În poziția oarecare din timpul mișcării pistonul este acționat pe fața din stînga de forța $p_1 S$ ($p_1 < p_0$), pe fața din dreapta de forța $p_2 S$ ($p_2 > p_0$), de greutatea

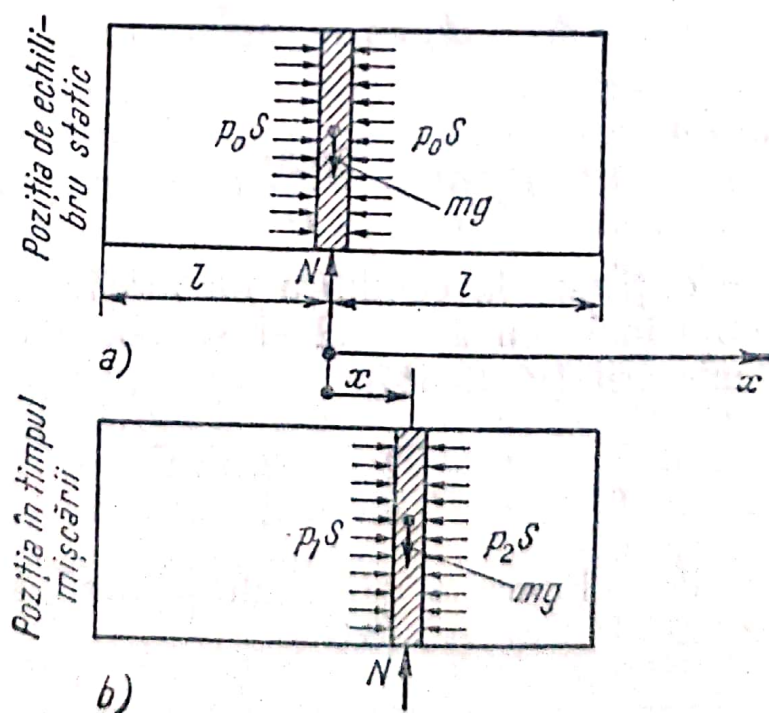


Fig. E 3.42

sa mg și de reacțiunea normală N din punctul de sprijin pe cilindru: avem

$$N - mg = 0 \quad \text{și} \quad F_x = p_1 S - p_2 S = (p_1 - p_2) S.$$

Pentru a determina pe p_1 și p_2 scriem relațiile de transformare izotermă a cantităților de gaz din stînga și din dreapta pistonului

$$p_0 S l = p_1 S (l + x), \quad p_0 S l = p_2 S (l - x)$$

de unde rezultă

$$p_1 = \frac{p_0 l}{l + x}, \quad p_2 = \frac{p_0 l}{l - x}$$

și

$$p_1 - p_2 = - \frac{2 p_0 l x}{l^2 - x^2}.$$

Ținînd seama de informația dată în enunț (oscilații mici) rezultă că $x \ll l$ și că, în consecință, x^2 poate fi neglijat față de l^2 , deci

$$l^2 - x^2 \approx l^2$$

cu care

$$p_1 - p_2 = - \frac{2 p_0 x}{l}.$$

Rezultă

$$F_x = - \frac{2 p_0 S x}{l}.$$

Relațiile obținute la echilibru nu modifică expresia lui F_x astfel încît cu ajutorul ei se poate determina pulsația mișcării [v. (3.35)]

$$\omega = \sqrt{- \frac{F_x}{m x}} = \sqrt{\frac{2 p_0 S}{m l}}.$$

Ecuatia de mișcare a pistonului ținînd seama de condițiile inițiale este [v. (3.31)]

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{m v_0^2 l}{2 p_0 S}} \sin \left(\sqrt{\frac{2 p_0 S}{l m}} t + \arctg \frac{x_0}{v_0} \sqrt{\frac{2 p_0 S}{l m}} \right).$$

Mai avem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{lm}{2p_0S}}; \quad v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2p_0S}{ml}}$$

3.11. Metoda pentru studiul echilibrului și mișcării sistemelor de scripeți

3.11.1. *Principiul metodei; domeniu de aplicabilitate.* În problemele de fizică, la statică sau dinamică, se întâlnesc adeseori sisteme de corpuri alcătuite din scripeți, fire și mase, denumite pe scurt *sisteme de scripeți*; în cele ce urmează se prezintă o metodă pentru studiul sistematic al echilibrului sau mișcării acestor sisteme.

3.11.2. *Noțiuni de bază; definiții; notații; relații.* La studiul echilibrului sau mișcării sistemelor de scripeți se fac următoarele ipoteze, nemenționate complet, de regulă, în enunțurile problemelor respective:

a) se presupune că toate firele care fac parte din sistem sînt perfect flexibile și inextensibile;

b) se neglijează toate frecările dintre corpurile care alcătuiesc sistemul precum și dintre acesta și mediul înconjurător;

c) se neglijează masele tuturor firelor și tuturor scripetilor care alcătuiesc sistemul considerat;

d) se presupune că la fiecare din cele două extremități ale sistemului de scripeți se află cîte un fir denumit respectiv *firul de intrare* (notat în cele ce urmează cu 1) și *firul de ieșire* (notat cu n , ultimul în ordinea numerotării firelor sistemului de la intrare către ieșire);

e) se presupune că singurele corpuri ale sistemului de scripeți cărora li se aplică forțe exterioare sistemului sînt firul de intrare și cel de ieșire; aceste forțe provin fie de la corpuri din afara sistemului, fie de la două mase atîrnate la extremitățile celor două fire, de intrare și ieșire (fig. 3.23),

Observație. În baza celor cinci ipoteze menționate mai sus rezultă că orice sistem de scripeți se comportă

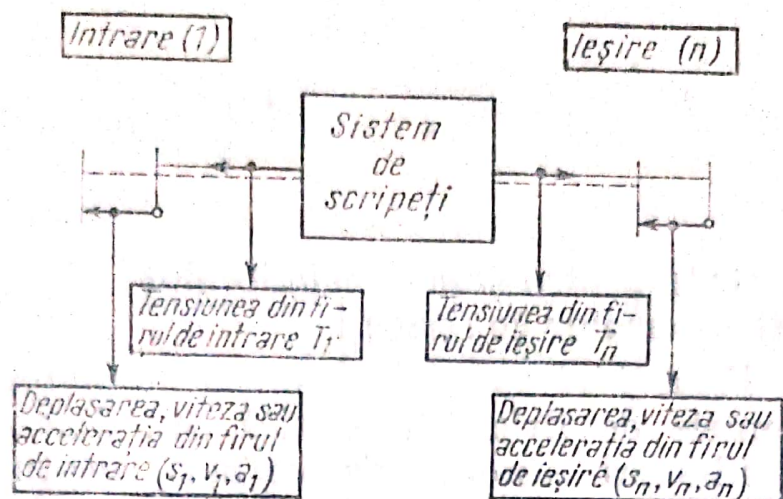


Fig. 3.23

ca un *dipol* (element fizic cu o singură intrare și o singură ieșire caracterizat printr-o constantă atașată dipolului considerat). Exemple de dipoli mai sînt rezistoarele, capacitățile, arcurile elastice (resoartele). Intrarea și ieșirea unui dipol alcătuit dintr-un sistem de scripeți sînt constituite din cele două fire de la extremități. Este de remarcă faptul că inversarea intrării cu ieșirea nu modifică rezultatele.

Legile de funcționare ale unui sistem de scripeți care respectă ipotezele menționate mai sus pot fi scrise concentrat în următoarele relații

$$k = \frac{s_1}{s_n} = \frac{v_1}{v_n} = \frac{a_1}{a_n} = \frac{T_n}{T_1} \quad (3.36)$$

în care avem: k — constanta sistemului de scripeți (constantă dipolului), s_1 — deplasarea firului de intrare, s_n — deplasarea firului de ieșire, v_1 — viteza firului de intrare, v_n — viteza firului de ieșire, a_1 — accelerația firului de intrare, a_n — accelerația firului de ieșire, T_1 — tensiunea firului de intrare, T_n — tensiunea firului de ieșire.

Constanta k a dipolului alcătuit din sistemul de scripeți considerat este un număr rațional și pozitiv ce depinde numai de configurația sistemului de scripeți respectiv. Ea se determină evaluînd oricare din cele

patru rapoarte (3.36), avînd în vedere următoarele situații de bază (fig. 3.24):

— pentru un scripete avînd centrul fix avem (fig. 3.24 a, c)

$$s_1 = s_2; \quad v_1 = v_2; \quad a_1 = a_2; \quad T_1 = T_2 \quad (3.37)$$

deci constanta sa are valoarea

$$k = \frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{T_2}{T_1} = 1; \quad (3.38)$$

— pentru un scripete avînd centrul mobil (care de regulă se leagă cu un fir ce merge la un alt scripete) avem (fig. 3.24 b, d)

$$s_1 = 2s_2, \quad v_1 = 2v_2, \quad a_1 = 2a_2, \quad T_2 = 2T_1 \quad (3.39)$$

deci constanta sa are valoarea

$$k = \frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{T_2}{T_1} = 2. \quad (3.40)$$

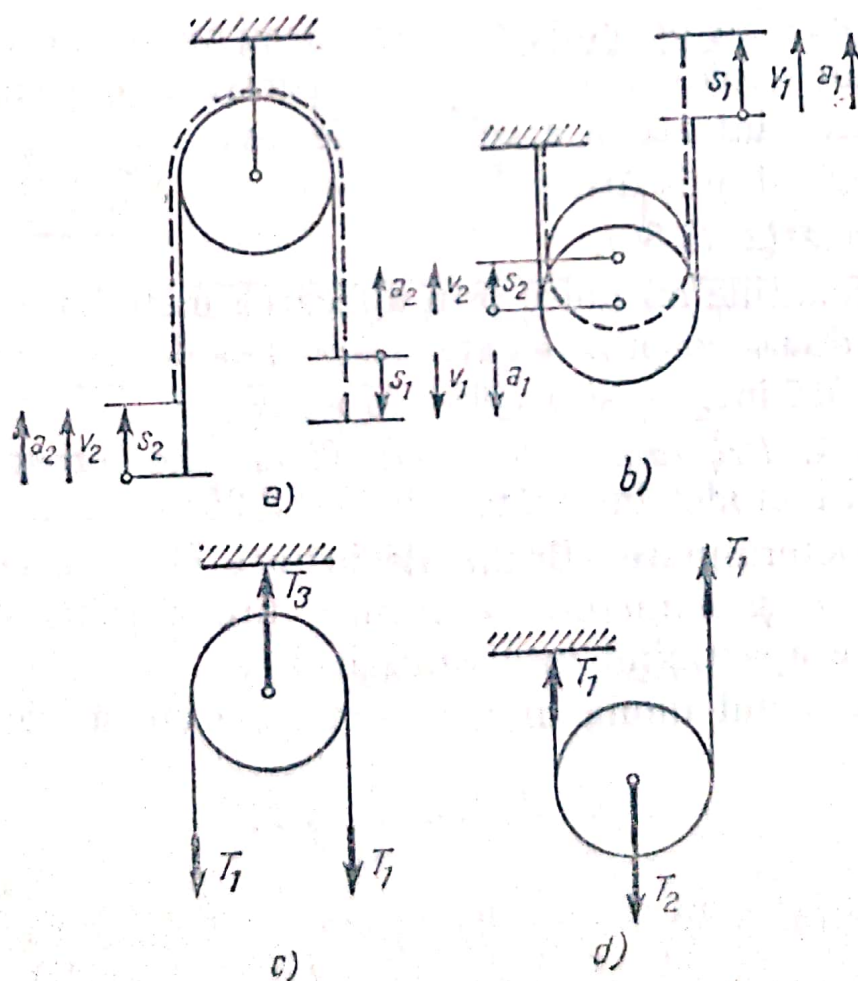


Fig. 3.24

Deoarece acestea sînt singurele situații de bază care apar în alcătuirea unui sistem de scripeți rezultă că, procedînd din aproape în aproape, de la intrare către ieșire putem determina constanta k a întregului sistem de scripeți.

Un caz mai general întîlnit mai rar este acela în care ambele extremități ale firului sînt mobile; în acest caz, dacă s_1 și s_2 sînt deplasările extremităților firului de susținere deplasarea s_3 a centrului scripetelui este

$$s_3 = \frac{s_1 + s_2}{2}$$

relația dintre tensiuni rămîinînd aceeași ca mai sus.

3.11.3. *Ecuațiile metodei.* Pentru studiul unui sistem de scripeți se folosesc următoarele ecuații:

În cazul echilibrului

- relația (3.36),
- ecuațiile obținute prin aplicarea metodei echilibrului celor două corpuri legate, respectiv de extremitățile firului de intrare și a celui de ieșire.

În cazul mișcării

- relația (3.36),
- ecuațiile obținute prin aplicarea metodei $m\ddot{a} = \bar{F}$ celor două corpuri legate, respectiv de extremitățile firului de intrare și a celui de ieșire.

3.11.4. *Programul metodei.* Operațiile programului acestei metode sînt arătate în fig. 3.25; ele sînt:

a) Determinarea firului de intrare (1) și a celui de ieșire (n) și numerotarea tuturor firelor sistemului cu numere aparținînd intervalului $[1, n]$.

b) calculul unuia dintre rapoartele cinematice

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1}{a_2} = k,$$

pentru întregul sistem de scripeți; acest calcul se face folosind primele trei relații (3.37) respectiv (3.39) pentru fiecare din scripeți care alcătuiesc sistemul.

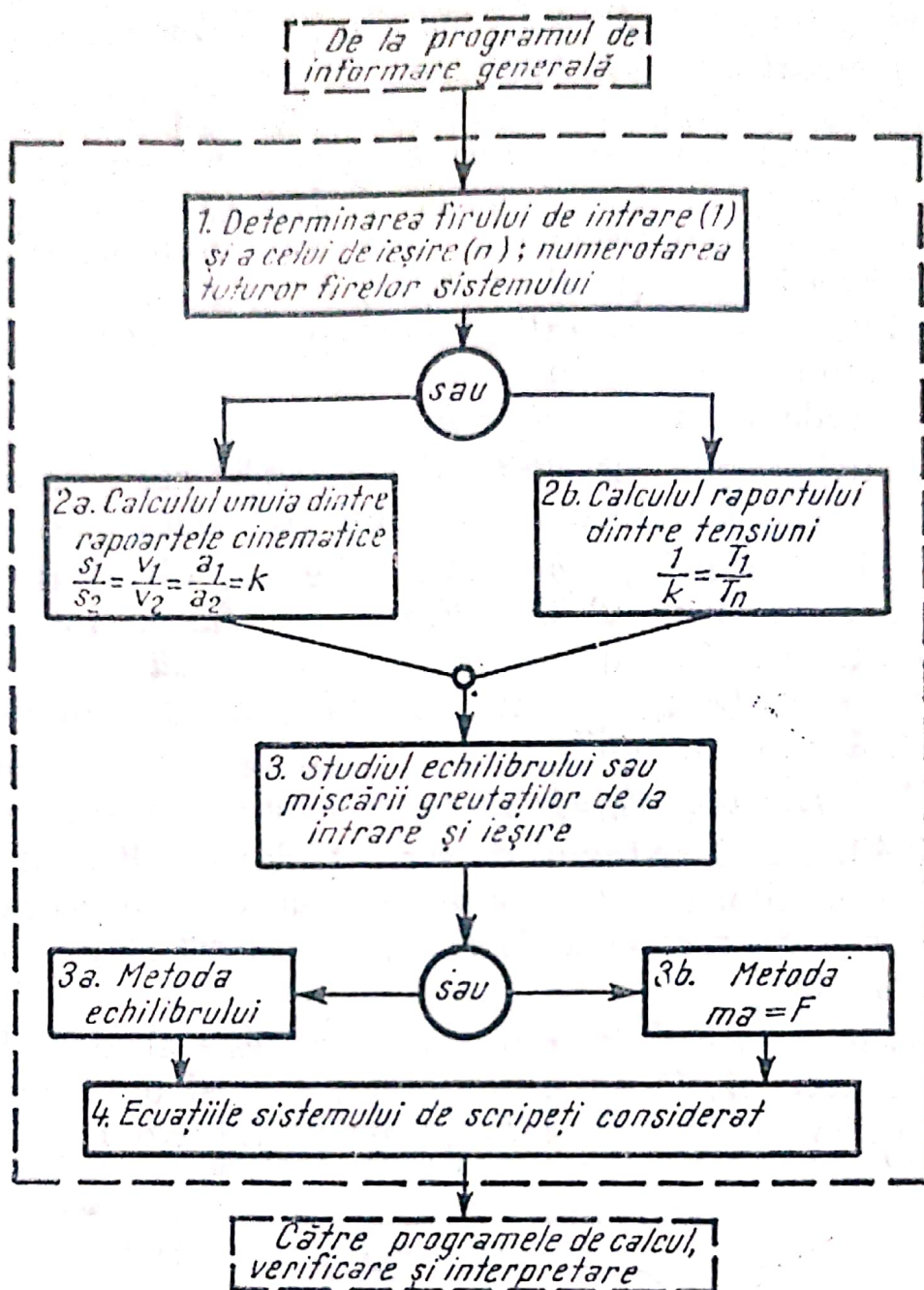


Fig. 3.25

c) Calculul raportului dintre tensiuni

$$\frac{T_1}{T_n} = \frac{1}{k}$$

pentru întregul sistem de scripeți: acest calcul se face folosind ultima relație (3.38) respectiv (3.40).

Se observă ușor că nu trebuie calculate ambele aceste rapoarte decât dacă dorim să verificăm rezultatele,

deoarece în baza legii cutiei negre oricare dintre rapoar-tele cinematice este inversul raportului dintre tensiuni.

De asemenea dintre rapoartele cinematice se va calcula numai acela care convine problemei respective.

d) După determinarea unuia dintre aceste rapoarte se trece la studiul mecanic al celor două greutateți legate de firul de intrare și cel de ieșire. Acest studiu se face izolând fiecare dintre aceste greutateți și aplicînd după caz:

e) Metoda echilibrului

f) Metoda ecuației $m\ddot{a} = \bar{F}$.

Se alcătuieste sistemul de ecuații care descrie mișcarea sau echilibrul sistemului considerat.

3.11.5. *Indicații și precizări.* Trebuie observat cu atenție dacă sistemul de scripete se află în mișcare accelerată, caz în care se aplică metoda $m\ddot{a} = \bar{F}$, sau în repaus, respectiv în mișcare uniformă, caz în care se aplică metoda echilibrului.

3.11.6. *Exemple de aplicare a metodei*

E 3.43. Se dă sistemul de scripeți din fig. E 3.43, a. Masa scripeților și a firelor se neglijează. Se neglijează și frecările. Se cere să se determine accelerațiile maselor m_1 și m_2 [16].

Rezolvare. Sistemul considerat este alcătuit din trei scripeți (A, B, C), trei fire (1, 2, 3) și două mase (m_1 , m_2). Vom considera drept fir de intrare 1 pe cel

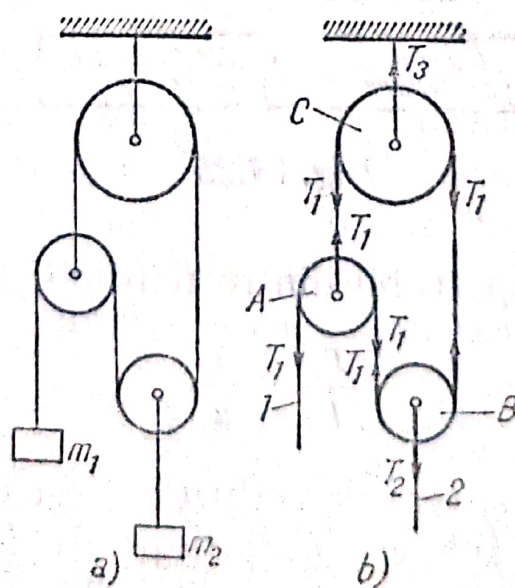


Fig. E 3.43

ce susține masa m_1 , iar drept fir de ieșire 2 pe cel ce susține masa m_2 (fig. E 3.43, b).

Tăind firele din jurul scripetilor și introducând tensiunile T_1, T_2, T_3 în firele tăiate, tensiuni notate cu același indice în lungul aceluiași fir și scriind ultimele relații (3.37) și (3.39) obținem:
scripetele A

$$2T_1 = T_1; \text{ rezultă } T_1 = 0$$

scripetele B

$$2T_1 = T_2; \text{ rezultă } T_2 = 0$$

scripetele C

$$2T_1 = T_3; \text{ rezultă } T_3 = 0.$$

Rezultă imediat că cele două mase m_1 și m_2 se mișcă liber pe verticală (tensiunea din firele de susținere fiind nulă) cu aceeași accelerație g .

E 3.44. Corpul de masă m_1 ridică printr-un sistem de scripeti ca în fig. E 3.44, a un corp de masă m_2 . Se cere:

- Să se determine accelerația sistemului
- Care este raportul maselor celor două corpuri pentru care sistemul se află în echilibru? Se neglijează frecările și masa scripetilor [7].

Rezolvare. a) Mai întâi remarcăm că prima întrebare a acestei probleme este greșit formulată, deoarece sistemul în totalitatea sa nu are o accelerație unică; diferitele sale elemente au, în timpul mișcării, accelerații diferite. Noi vom determina în cele ce urmează accelerațiile a_1 și a_2 ale celor două mase,

Vom considera pentru aceasta sistemul ca fiind alcătuit din (fig. E 3.44, a):

- sistemul de scripeti
- masa m_1
- masa m_2 .

Pentru sistemul de scripeti vom determina constanta k iar maselor m_1 și m_2 le vom aplica metoda $m\ddot{a} = \vec{F}$ pentru rezolvarea primului punct, respectiv metoda echilibrului pentru rezolvarea celui de al doilea punct.

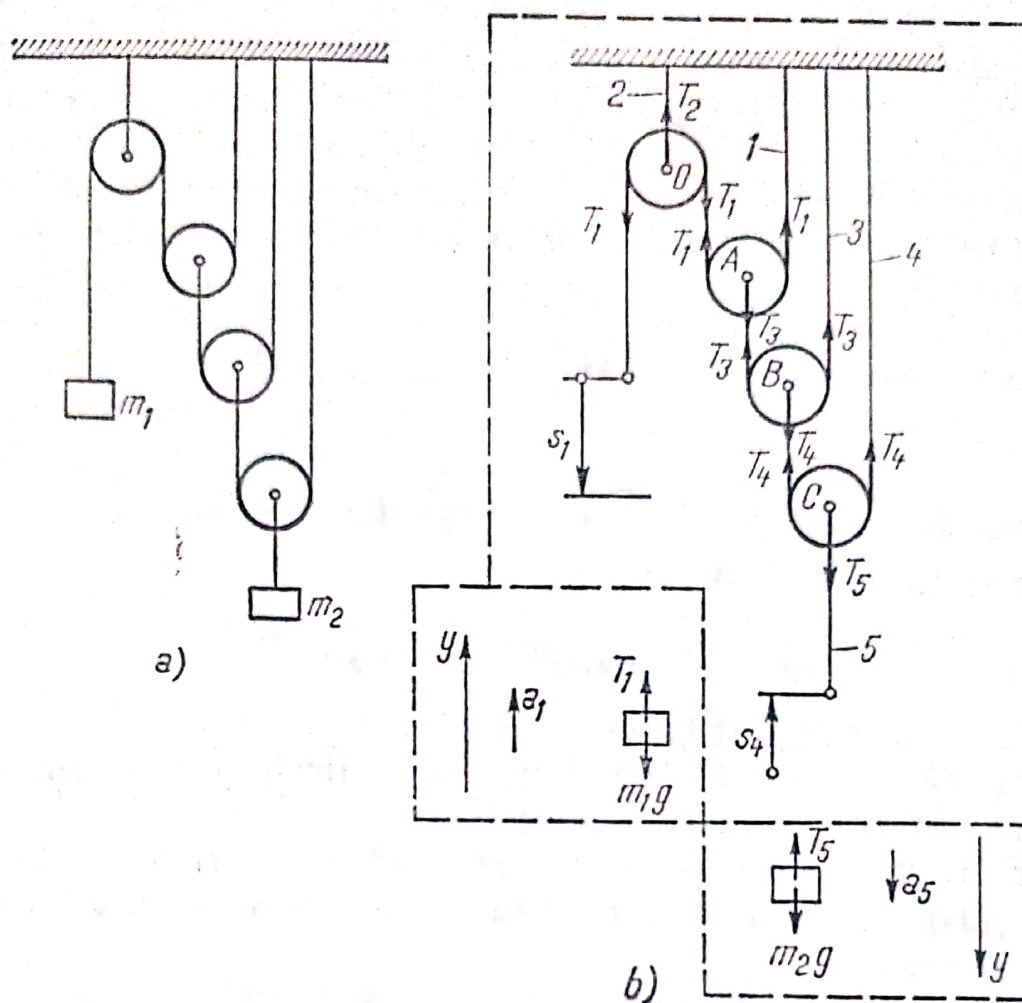


Fig. E 3.44

Sistemul de scripeți este alcătuit din patru scripeți și cinci fire; am considerat că firul 1 este firul de intrare și firul 5 este firul de ieșire (cititorul se poate convinge că inversarea lor nu schimbă rezultatele).

Vom determina constanta sistemului de scripeți folosind ambele procedee (deplasări și forțe).

Procedeul deplasărilor. Dacă firul 1 se deplasează în lungul său cu distanța s_1 presupusă în sus (inversarea sensului nu schimbă rezultatele), punctul A se deplasează cu

$$s_A = \frac{s_1}{2},$$

punctul B cu

$$s_B = \frac{s_A}{2} = \frac{s_1}{4}$$

iar punctul C cu

$$s_C = s_5 = \frac{s_B}{2} = \frac{s_1}{8}.$$

Rezultă

$$\frac{s_1}{s_5} = 8$$

deci constanta sistemului de scripeti are valoarea

$$k = \frac{s_1}{s_5} = \frac{v_1}{v_5} = \frac{a_1}{a_5} = 8. \quad (1)$$

Procedeul forțelor. Tăiem firele sistemului de scripeti, introducînd tensiunile din fire $T_1, \dots, T_5$ și scriind ecuațiile de echilibru ale fiecărui scripete obținem

$$T_2 = 2T_1; \quad T_4 = 2T_3$$

$$T_3 = 2T_1; \quad T_5 = 2T_4.$$

Rezultă

$$T_5 = 2T_4 = 4T_3 = 8T_1$$

deci

$$\frac{T_1}{T_5} = \frac{1}{8} = \frac{1}{k} \quad (2)$$

fapt care verifică cele menționate în introducere la această metodă.

Aplicînd metoda $m\ddot{a} = \bar{F}$ maselor m_1 și m_2 rezultă (fig. E 3.44, b)

$$\begin{aligned} (m_1 a_{1y} = F_{1y}) \quad m_1 a_1 &= T_1 - m_1 g \\ (m_2 a_{5y} = F_{5y}) \quad m_2 a_5 &= m_2 g - T_5. \end{aligned} \quad (3)$$

Ecuațiile (1) și (3) alcătuiesc un sistem de patru ecuații cu necunoscutele a_1, a_5, T_1 și T_5 . Deoarece tensiunile T_1 și T_5 nu se cer, le vom elimina

$$T_1 = m_1 (a_1 + g); \quad T_5 = m_2 (g - a_5)$$

$$\frac{T_1}{T_5} = \frac{m_1 (a_1 + g)}{m_2 (g - a_5)} = \frac{1}{8}.$$

Înlocuind aici relația (1) rezultă

$$\frac{m_1(8a_5 + g)}{m_2(g - a_5)} = \frac{1}{8},$$

de unde

$$a_5 = \frac{m_2 - 8m_1}{64m_1 + m_2}g$$

și deci

$$a_1 = 8a_5 = \frac{m_2 - 8m_1}{64m_1 + m_2}8g.$$

b) În cazul echilibrului sau mișcării uniforme avem $a_1 = a_2 = 0$ și deci

$$\frac{m_2}{m_1} = 8 = k,$$

E. 3.45. Un bloc de piatră de masă $m = 200$ kg este ridicat la înălțimea $h = 8$ m folosind un plan înclinat și un sistem de scripeți (fig. E 3.45, a). Planul înclinat

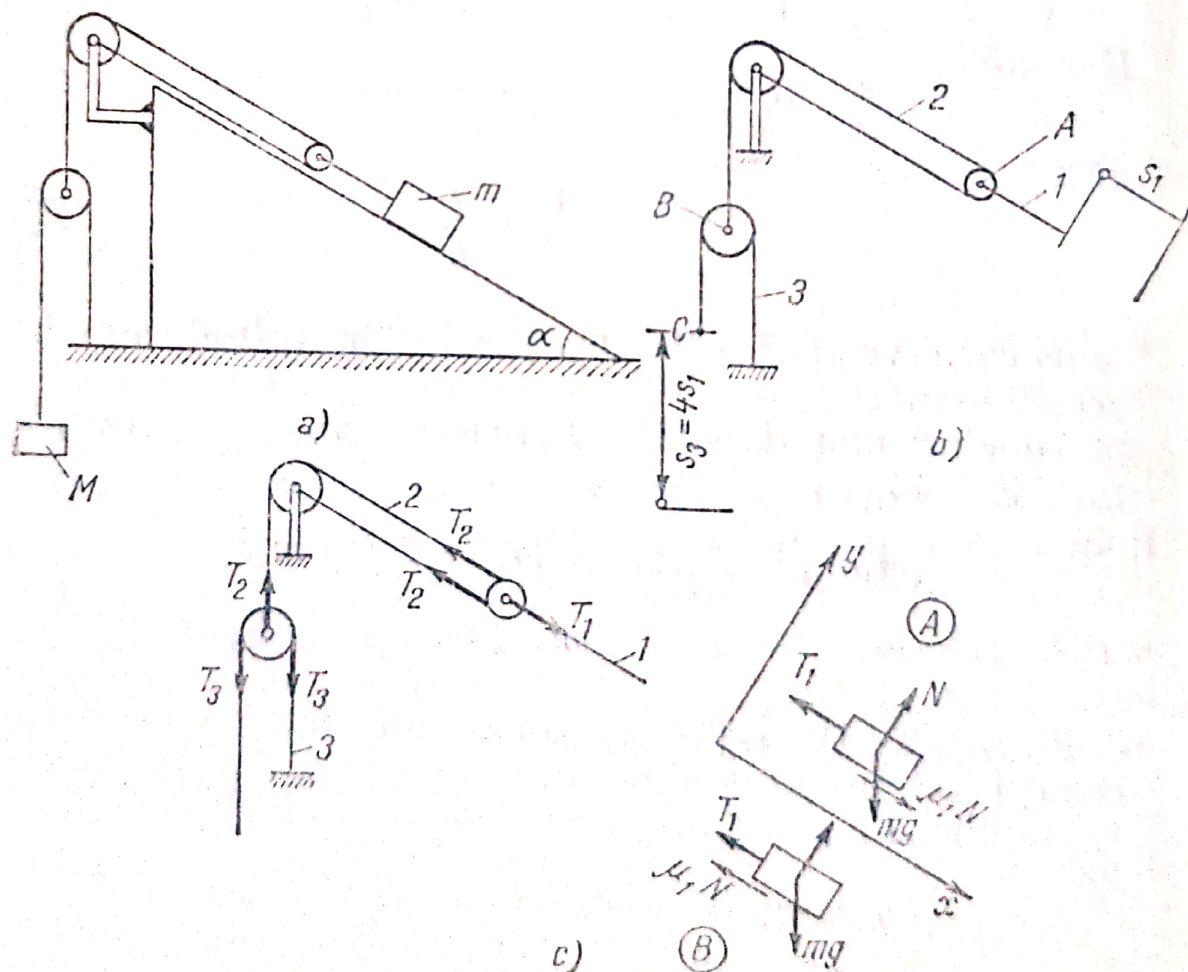


Fig. E 3.45.

face unghiul $\alpha = 30^\circ$ cu orizontala iar coeficientul de frecare de alunecare a blocului de piatră pe planul inclinat este $\mu_1 = 0,3$. Se cere să se calculeze ($g = 10 \text{ m/s}^2$):

a) Forța F cu care trebuie tras la capătul C pentru a efectua ridicarea blocului de piatră într-o mișcare uniformă.

b) Valoarea masei M ce ar putea echilibra sistemul în cazurile $\mu = \mu_1$ și $\mu = 0$.

c) Considerînd că în momentul cînd blocul de piatră se află la înălțimea h se rupe cablul de legătură, se cere timpul t_1 după care blocul de piatră ajunge la baza planului și timpul t_2 după care el se oprește mergînd în continuare pe planul orizontal. Coeficientul de frecare pe porțiunea orizontală este $\mu_2 = 0,7$ [7].

Rezolvare. Sistemul este alcătuit din trei scripeti, trei fire și două mase. Firul de intrare este 1, iar firul de ieșire este 3 (în ordinea numerotării noastre).

Vom determina constanta k a sistemului de scripeti și vom scrie ecuațiile de echilibru ale masei m .

Procedul deplasărilor. Dacă firul 1 se deplasează în lungul său cu distanța s_1 în josul planului inclinat, firul 2 (deci și punctul B) se va deplasa cu distanța $2s_1$, iar un punct C al firului 3 cu distanța $s_3 = 4s_1$: avem deci

$$k = \frac{s_1}{s_3} = \frac{1}{4}. \quad (1)$$

Procedul forțelor. Tăind firele sistemului de scripeti, introducînd tensiunile în fire T_1 , T_2 și T_3 și scriind ecuațiile de echilibru a primului și ultimului scripete obținem

$$2T_2 = T_1; \quad 2T_3 = T_2$$

deci

$$2T_3 = T_2 = \frac{T_1}{2}$$

de unde

$$k = \frac{T_3}{T_1} = \frac{1}{4}. \quad (2)$$

a) Forța cu care trebuie tras capătul C pentru a efectua ridicarea blocului de piatră într-o mișcare

uniformă este tensiunea T_3 pentru echilibrul la limita de alunecare a blocului de piatră în susul planului înclinat; din echilibrul blocului de piatră deducem (fig. E 3.45, c).

$$(\sum F_x = 0) - T_1 + \mu_1 N + mg \sin \alpha = 0$$

$$(\sum F_y = 0) N - mg \cos \alpha = 0.$$

Rezultă

$$T_1 = mg (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

și în baza relației (2)

$$\begin{aligned} F = T_3 &= \frac{1}{4} T_1 = \frac{mg}{4} (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = \\ &= \frac{200 \times 10}{4} (0,5 + 0,3 \times 0,86) = 379 \text{ N.} \end{aligned}$$

b) Sistemul se află la limita de alunecare în sus a blocului de piatră pentru

$$T'_1 = mg (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

iar la limita de alunecare în jos pentru

$$T''_1 = mg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Acest ultim rezultat se deduce din scrierea ecuațiilor de echilibru pentru situația B din fig. E 3.45, c.

Vom avea deci pentru echilibru

$$T''_1 \leq T_1 \leq T'_1$$

și în baza relației (2)

$$T''_1 \leq 4T_3 \leq T'_1.$$

Dar cum din echilibrul masei M atârnată la extremitatea firului 3 rezultă $T_3 = Mg$, obținem final

$$\frac{m(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{4} \leq M \leq \frac{m(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{4}$$

care pentru $\mu = 0$ conduce la o valoare unică

$$M = \frac{m \sin \alpha}{4}.$$

Numeric rezultă:

— în cazul cu frecare

$$12,1 \leq M \leq 37,9$$

— în cazul fără frecare

$$M = 25 \text{ kg.}$$

c) Timpul după care blocul ajunge la baza planului înclinat se calculează ca și cum masa M și sistemul de scripeti nu ar exista (corp lansat cu viteză inițială nulă în josul unui plan înclinat și în continuare pe planul orizontal); rezultă

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{\sin \alpha (\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) g}} =$$

$$\sqrt{\frac{2 \times 8}{0,5 \times (0,5 - 0,3 \times 0,86) \times 10}} = \sqrt{13,3} \approx 3,65 \text{ secunde.}$$

$$t_2 = \frac{v_0}{a_2} = \frac{1}{\mu_2 g} \sqrt{\frac{2a_1 h}{\sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) h}{\mu^2 \sin \alpha g}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2(0,5 - 0,3 \times 0,86) \times 8}{0,7^2 \times 0,5 \times 10}} = \sqrt{1,58} = 1,25 \text{ secunde}$$

unde v_0 este viteza la baza planului înclinat, a_1 — accelerația pe planul înclinat și a_2 — accelerația pe planul orizontal.

E 3.46. Pe un șantier de construcții se utilizează un scripete mobil S_1 , pentru manevrarea unor materiale prin ridicare și coborîre pe o înălțime $h = 20$ m, conform schiței alăturate (fig. E 3.46, a).

Corpul ridicat împreună cu containerul are masa $m_1 = 750$ kg, iar la coborîre containerul rămas gol are masa $m_2 = 50$ kg. Se presupune că la coborîre pînă la jumătate din înălțimea h , masa m_2 are o mișcare uniform accelerată cu accelerația $g = 10$ m/s². Containerul este legat de scripetele mobil printr-un cablu de oțel care are modulul de elasticitate $E = 2 \cdot 10^{11}$ N/m² și secțiunea $S = 0,5$ cm². Sistemul de scripeti este acționat de un motor. Se cere să se calculeze:

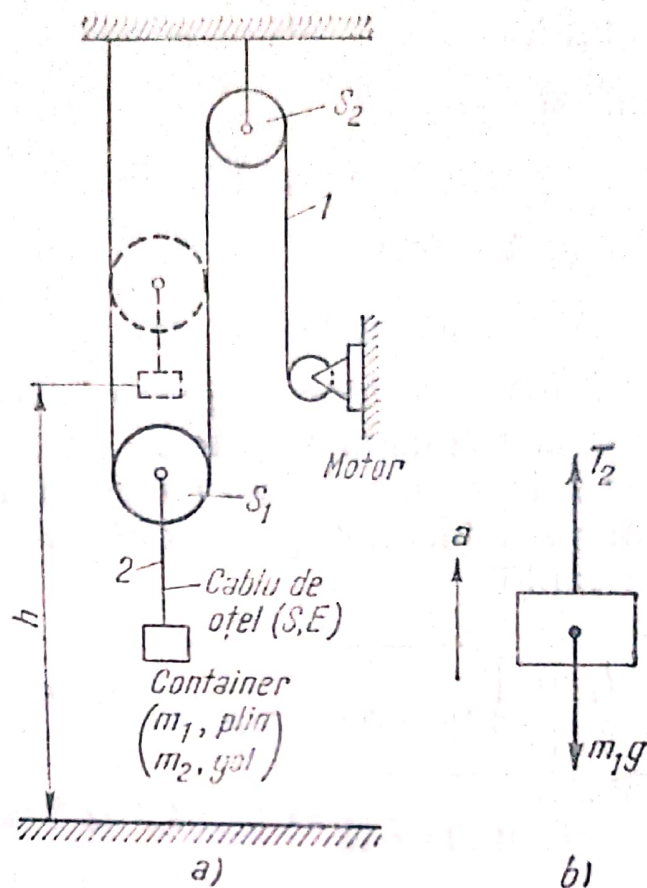


Fig. E 3.46

a) Forța F_1' ce trebuie dezvoltată de motor când sarcina de masă m_1 este ridicată uniform și F_1'' când aceasta este ridicată uniform accelerat cu accelerația $a = 2 \text{ m/s}^2$.

b) Forța de frînare F_1''' dezvoltată de motor pentru ca containerul de masă m_2 să coboare ultima jumătate din înălțimea h , uniform încetinit, astfel încât să atingă solul cu viteza $v' = 0$.

c) Alungirea cablului la ridicarea uniformă $(\Delta l)_u$ și la ridicarea uniform accelerată $(\Delta l)_a$ a sarcinii de masă m_1 .

d) Lucrul mecanic efectuat de motor la ridicarea uniformă (L_u) și uniform accelerată (L_a) a masei m_1 .

e) Timpul T în care se efectuează ridicarea masei m_1 în mișcarea uniformă dacă puterea debitată de motor în acest caz este $P = 5 \text{ kW}$.

(Admitere IPB, ingineri, sept. 1972)

Rezolvare. Sistemul considerat este alcătuit din doi scripeți (unul cu ax fix și celălalt cu ax mobil), o masă, două fire și un motor de acționare. Firul de intrare este 1, iar firul de ieșire este 2. Se poate arăta ușor faptul că constanta acestui sistem are valoarea

$$k = \frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{T_2}{T_1} = 2. \quad (1)$$

a) În cazul mișcării uniforme sau echilibrului, tensiunea din firul 2 este egală cu greutatea containerului

$$T_2 = m_1 g.$$

Forța ce trebuie dezvoltată de motor este egală cu tensiunea din firul 1 (T_1); în baza relațiilor (1) avem

$$F'_1 = T_1 = \frac{T_2}{2} = \frac{m_1 g}{2} = \frac{750 \times 10}{2} = 3750 \text{ N} = 3,75 \text{ kN}.$$

În cazul mișcării uniform accelerate de ridicare cu accelerația a prin aplicarea metodei $m\vec{a} = \vec{F}$ pentru container deducem (fig. E 3.46, b)

$$m_1 a = T_2 - m_1 g \quad F_2 = m_1(a + g)$$

iar în baza relațiilor (1)

$$\begin{aligned} F''_1 = T_1 &= \frac{T_2}{2} = \frac{m_1(a + g)}{2} = \frac{750(2 + 10)}{2} = \\ &= 4500 \text{ N} = 4,5 \text{ kN}. \end{aligned}$$

b) Din enunț, rezultă că prima jumătate a cursei $\left(0, \frac{h}{2}\right)$ containerul gol (masa m_2) coboară liber (cu accelerația $g = 10 \text{ m/s}^2$) atingând deci în acest punct viteza

$$v = \sqrt{2g \frac{h}{2}} = \sqrt{gh} = \sqrt{10 \times 20} = 14,1 \text{ m/s}.$$

În cea de a doua perioadă a deplasării containerului (perioada de oprire) mișcarea sa va fi uniform întârziată, tot cu accelerația g orientată însă vertical în sus.

Într-adevăr, aplicînd relația lui Toricelli între poziția de sosire ($v = 0$) și cea de plecare rezultă

$$0 = v^2 - 2a \frac{h}{2} = v^2 - ah.$$

Înlocuind valoarea lui v^2 aflată mai sus rezultă

$$gh - ah = 0 \quad a = g = 10 \text{ m/s}^2.$$

Tensiunea în cablul de susținere a containerului pe această perioadă se determină din aplicarea metodei $m\vec{a} = \vec{F}$ containerului la fel ca în fig. E 3.46, b, în care se înlocuiește m_1 cu m_2 și a cu g , rezultă

$$T_2 = m_2(g + g) = 2m_2g.$$

Forța de frînare reprezintă tensiunea din cablul 1 calculată pentru acest caz

$$F_1''' = T_1 = \frac{T_2}{2} = m_2g = 50 \times 10 = 500 \text{ N} = 0,5 \text{ kN}.$$

c) Alungirea relativă a cablului (de susținere a containerului) este respectiv

$$\begin{aligned} (\Delta l)_u &= \frac{(T_2)_u}{SE} = \frac{m_1g}{SE} = \frac{750 \times 10}{0,5 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^{11}} = \\ &= 7,5 \times 10^{-4} \text{ m.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta l)_a &= \frac{(T_2)_a}{SE} = \frac{m_1(a + g)}{SE} = \frac{750 \times (2 + 10)}{0,5 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^{11}} = \\ &= 9 \times 10^{-4} \text{ m.} \end{aligned}$$

d) Lucrul mecanic efectuat de motor la ridicarea uniformă și uniform accelerată se poate calcula ținînd seama fie de deplasarea containerului ($s_2 = h$) fie de deplasarea firului ce merge la motor ($s_1 = 2s_2 = 2h$) așa cum rezultă din relația (1); avem
— în primul caz

$$L_u = (T_2)_u h = m_1 h g = 750 \times 10 \times 20 = 150 \text{ kJ}$$

$$\begin{aligned} L_a &= (T_2)_a h = m_1(a + g)h = \\ &750 \times (2 + 10) \times 20 = 180 \text{ kJ;} \end{aligned}$$

— în cel de al doilea caz:

$$L_u = F'_1 \cdot 2h = \frac{m_1 g}{2} \cdot 2h = m_1 g h = 150 \text{ kJ}$$

$$L_a = F'' \cdot 2h = \frac{m_1(a + g)}{2} \cdot 2h = m_1(a + g)h = 180 \text{ kJ.}$$

Evident, rezultatele obținute sînt identice.

e) Timpul în care se efectuează ridicarea masei m_1 în mișcare uniformă ținînd seama de puterea debitată de motor rezultă din formula puterii

$$P = \frac{L_u}{t}.$$

Rezultă

$$t = \frac{L_u}{P} = \frac{150 \times 10^3}{5 \times 10^3} = 30 \text{ secunde.}$$

Observații. Pe parcursul calculului, spre a nu complica rezolvarea, tensiunile din cele două cabluri (T_1 , T_2) au fost notate la fel pentru diferitele perioade de mișcare; sperăm că cititorul va face distincțiile corespunzătoare.

Din enunțul problemei lipsește mențiunea că alungirea cerută în problemă (la punctul 3) este cea a cablului 2 (cablul ce leagă containerul de scripetele 1) și nu a cablului 1 care are lungimea variabilă. O asemenea precizare ar evita, mai ales în condiții de concurs, eventualele dubii.

3.12. Metoda diagramei calorimetrice

3.12.1. Principiul metodei; domeniu de aplicabilitate.

Metoda diagramei calorimetrice este o metodă care permite urmărirea grafică a proceselor de schimb de căldură care au loc între două sau mai multe corpuri, puse în contact unele cu altele într-un calorimetru.

Diagrama calorimetrică are în abscisă timpul (s) și în ordonată temperatura ($^{\circ}\text{C}$).

Ea este o diagramă parțial cantitativă și parțial calitativă; aceasta înseamnă că:

— nu interesează desfășurarea amănunțită a proceselor de schimb de căldură, ci numai starea inițială, starea finală și cantitatea de căldură schimbată;

— nu interesează în general timpul cât durează schimbul de căldură: uneori se presupune că schimbul de căldură are loc instantaneu.

După prezentarea grafică a acestor procese ecuația bilanțului termic se scrie mult mai ușor, omiterea unor termeni fiind practic exclusă.

3.12.2. *Noțiuni de bază; definiții; notații și relații.* În ecuațiile acestei metode apar următoarele mărimi:

Cantitatea de căldură schimbată (cedată sau primită) de un corp (solid sau lichid) între două stări (inițială și finală) între care nu-și schimbă starea de agregare

$$Q = m c \Delta t \quad (3.41)$$

în care: Q — cantitatea de căldură schimbată (J), m — masa corpului (kg), c — căldura specifică a corpului (J/kg·grd), Δt — diferența de temperatură în modul dintre stările inițială și finală.

Cantitatea de căldură schimbată (cedată sau primită) de un corp care își schimbă parțial sau total starea de agregare (trecere solid-lichid și invers sau lichid-vapori și invers) este

$$Q = m \lambda \quad (3.42)$$

în care: Q — cantitatea de căldură schimbată (J), m — masa care își schimbă starea de agregare (kg), λ — căldura de schimbare a stării: căldură de topire, de solidificare, de vaporizare, de condensare (J/kg).

Cantitatea de căldură produsă de un combustibil prin ardere este dată de relația

$$Q = m q \quad (3.43)$$

în care: Q — cantitatea de căldură produsă (J), m — masa combustibilului (kg), q — puterea calorică a combustibilului (J/kg).

Capacitatea calorică a unui corp sau echivalentul în apă este dată de relația

$$C = m c \quad (3.44)$$

în care: C — capacitatea calorică (J/grd), m — masa corpului (kg), c — căldura specifică a corpului ($J/kg \cdot grd$).

Randamentul caloric este dat de relația

$$\eta = \frac{Q_u}{Q_c} \quad (3.45)$$

în care: Q_u — căldura utilă (J), Q_c — căldura consumată (J).

3.12.3. Ecuațiile metodei. Metoda diagramei calorimetrice are la bază metoda bilanțului energetic în care termenii săi reprezintă, de regulă, cantitatea de căldură schimbată. Nu este însă exclus ca, odată cu căldura, să apară în discuție și alte energii (spre exemplu dacă unui corp i se dă drumul într-un calorimetru de la înălțimea h mai apare în discuție și aportul de energie mgh).

Această metodă are o singură ecuație care este:

— în cazul fără pierderi de energie:

energia cedată = energia primită

— în cazul cu pierderi de energie

energia cedată = energia primită + energia pierdută.

Ecuațiile metodei se scriu folosind reprezentările din diagramă; energia cedată este reprezentată de suma energiilor din procesele situate deasupra temperaturii de echilibru iar energia primită de suma energiilor proceselor situate dedesubtul acestei temperaturi.

3.12.4. Programul metodei. Operațiile acestui program sînt arătate în fig. 3.26, ele sînt:

a) Se stabilește numărul și natura tuturor corpurilor care participă la schimbul de căldură

b) Se reprezintă pe diagrama timp-temperatură procesele care au loc în sistem, astfel:

— se reprezintă pe axa Ot° temperaturile inițiale ale tuturor corpurilor care participă la schimbul de căldură;

— se reprezintă starea finală a sistemului de echilibru termic printr-un punct $M(\theta^\circ, t)$, situat în planul $Ot^\circ t$ într-o poziție convenabilă spre a putea fi reprezentate toate procesele care au loc în sistem (θ° — temperatura de echilibru dată în problemă sau presupusă);

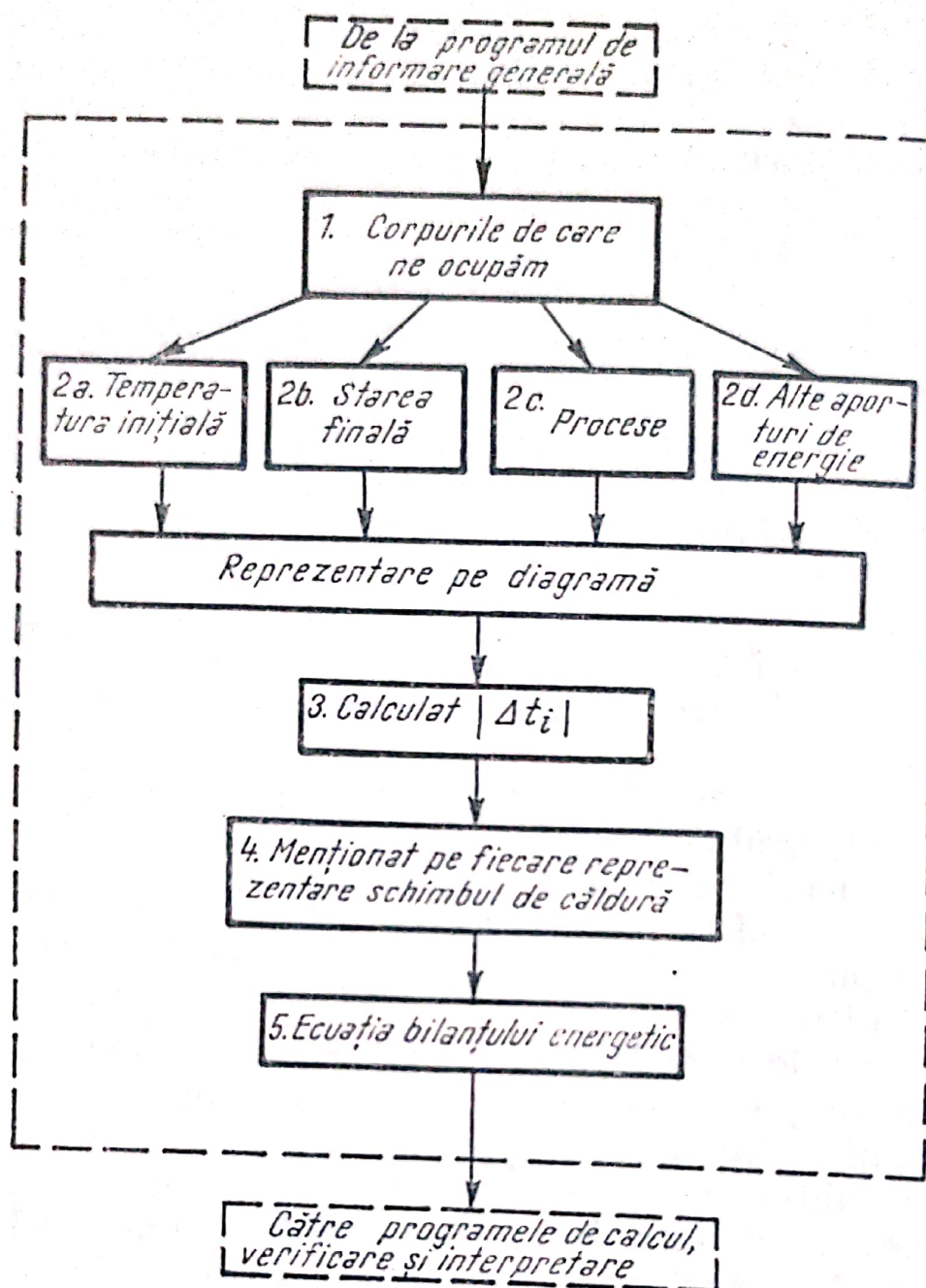


Fig. 3.26

— se reprezintă toate procesele care au loc în sistem prin segmente de dreaptă așa cum se arată în fig. 3.27, orizontale sau înclinate (orizontale — schimbări de stare; înclinate — primire sau cedare);

— se reprezintă aportul sau consumul de alte energii decât cea calorică.

c) Se calculează diferențele de temperatură între stările inițiale și starea finală la echilibru a sistemului, atunci când nu există schimbări ale stării de agregare

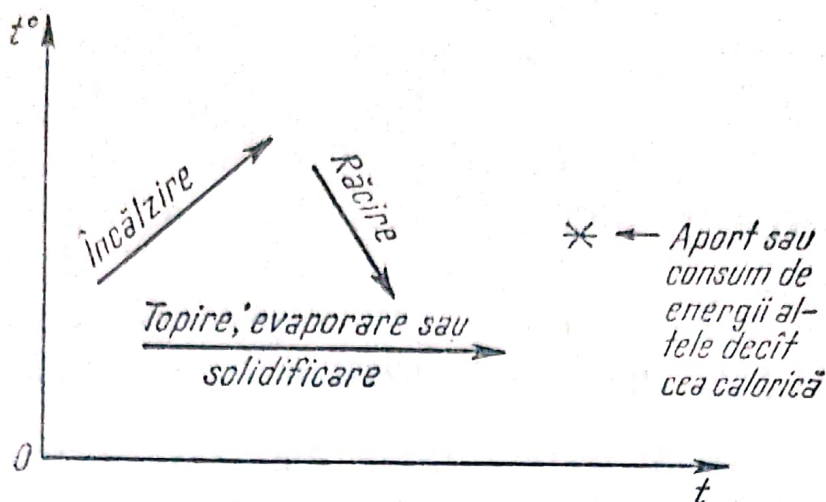


Fig. 3.27

sau diferențe de temperaturi intermediare și când între starea inițială și cea finală există schimbări ale stării de agregare.

d) Se scriu pe fiecare reprezentare valorile cantităților de căldură schimbate.

e) Se scrie ecuația bilanțului energetic, care se obține din însumarea tuturor valorilor cantităților de căldură de deasupra temperaturii de echilibru și egalarea sumei acestora cu suma cantităților de căldură de dedesubtul temperaturii de echilibru, la care se adaugă eventual pierderile.

3.12.5. *Indicații și precizări.* Nu există indicații speciale la aplicarea acestei metode; urmărirea strictă a programului indicat conduce la rezolvarea fără dificultăți a problemelor.

3.12.6. *Exemple de aplicare a metodei*

E 3.47. Într-un vas, a cărui capacitate termică este neglijabilă și care conține $m_a = 100$ g apă avînd temperatura $t_a = 20^\circ\text{C}$, se introduc $m_g = 20$ g gheață la temperatura $t_g = 10^\circ\text{C}$ și apoi vapori de apă uscați la temperatura $t_v = 100^\circ\text{C}$. Se cere să se determine masa m_v a vaporilor folosiți știind că temperatura de echilibru termic a amestecului este $\theta = 40^\circ\text{C}$.

Se dau:

— căldura specifică a apei $c_a = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{grd}}$,

- căldura specifică a gheții $c_g = 0,5 \text{ cal/g} \cdot \text{grd}$,
 - căldura de topire a gheții $\lambda_g = 80 \text{ cal/g}$,
 - căldura de vaporizare a apei $\lambda_v = 540 \text{ cal/g}$.
- Se neglijează orice fel de pierderi de căldură.

Rezolvare. Folosim metoda diagramei calorimetrice aplicată celor trei corpuri (apă, gheață și vapori) care alcătuiesc sistemul ce schimbă căldura (fig. E 3.47).

Reprezentăm pe axa Ot° a diagramei $t^\circ Ot$ temperaturile inițiale ale tuturor corpurilor; $t_g = -10^\circ\text{C}$, $t_a = 20^\circ\text{C}$, $t_v = 100^\circ\text{C}$ precum și temperatura de echilibru $\theta = 40^\circ\text{C}$ care este dată în enunț.

Starea finală a amestecului este reprezentată de punctul M situat pe paralela la axa Ot dusă la nivelul de temperatură $\theta = 40^\circ\text{C}$.

Se reprezintă prin segmente de dreaptă procesele de schimb de căldură și de schimbarea stării de agregare în sistem și anume:

- încălzirea apei din vas (segmentul aM);
- încălzirea, topirea și încălzirea apei rezultate din gheață (segmentele bc , cd și dM);
- condensarea și răcirea apei rezultată din vapori (segmentele ef și fM).

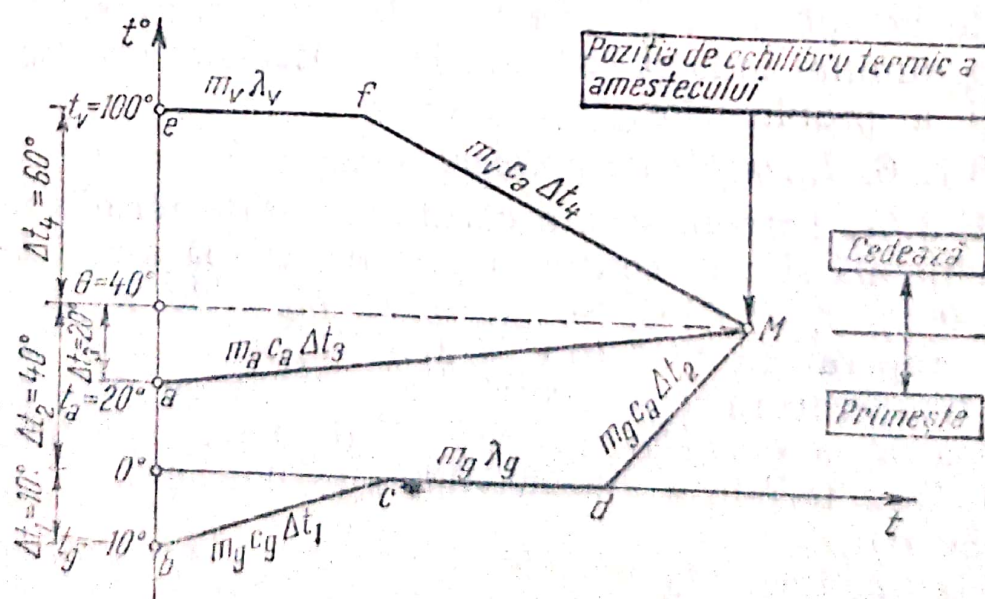


Fig. E 3.47

Calculăm diferențele dintre temperatura de echilibru și celelalte temperaturi precum și dintre temperatura gheții și cea a schimbării stării sale de agregare

$$\Delta t_1 = 0 - t_g = 0^\circ - (-10^\circ) = 10 \text{ grd}$$

$$\Delta t_2 = \theta - 0 = 40^\circ - 0^\circ = 40 \text{ grd}$$

$$\Delta t_3 = \theta - t_a = 40^\circ - 20^\circ = 20 \text{ grd}$$

$$\Delta t_4 = t_0 - \theta = 100^\circ - 40^\circ = 60 \text{ grd}$$

pe care le reprezentăm de asemenea pe diagrama $t^\circ Ot$. Pe fiecare din segmentele ce reprezintă procesul de schimb de căldură se menționează cantitățile de căldură cedate sau primite în cursul procesului respectiv și anume [v. (3.41), (3.42)]

$$\Delta Q_{aM} = m_a c_a \Delta t_3$$

$$\Delta Q_{bc} = m_g c_g \Delta t_1$$

$$\Delta Q_{cd} = m_g \lambda_g$$

$$\Delta Q_{dM} = m_g c_a \Delta t_2$$

$$\Delta Q_{ef} = m_v \lambda_v$$

$$\Delta Q_{fM} = m_v c_a \Delta t_4.$$

Se însumează toate cantitățile de căldură situate deasupra temperaturii de echilibru, care reprezintă cantități de căldură cedate și se egalează cu suma cantităților de căldură situate sub temperatura de echilibru, care reprezintă cantități de căldură primite, obținându-se astfel ecuația bilanțului termic; rezultă

$$\Delta Q_{aM} + \Delta Q_{bc} + \Delta Q_{cd} + \Delta Q_{dM} = \Delta Q_{ef} + \Delta Q_{fM}.$$

Înlocuind expresiile fiecăreia dintre ele deducem din această ecuație

$$m_v = \frac{m_a c_a \Delta t_3 + m_g (c_g \Delta t_1 + \lambda_g + c_a \Delta t_2)}{\lambda_v + c_a \Delta t_4}.$$

Înlocuind valorile numerice obținem

$$m_v = \frac{100 \times 1 \times 20 + 20(0,5 \times 10 + 80 + 1 \times 40)}{540 + 1 \times 60} = 7,5 \text{ g.}$$

E 3.48. Într-o cadă avînd masa $m_c = 10$ kg și căldura specifică $c_c = 418,7$ J/kg · grd, care conține $m_a = 20$ kg apă la temperatura $t_a = 20^\circ\text{C}$, cade de la înălțimea $h = 5$ m o bucată de gheață cu masa $m_g = 2$ kg, avînd temperatura $t_g = -5^\circ\text{C}$.

Se cere să se determine cantitatea m_v de vapori de apă la temperatura $t_v = 100^\circ\text{C}$ care trebuie introdusă în amestecul din cadă pentru ca temperatura finală să fie $\theta = 15^\circ\text{C}$, fără a se schimba temperatura inițială a căzii cu apă.

Se dau:

- căldura specifică a gheții $c_g = 2093$ J/kg · grd.
- căldura de topire a gheții $\lambda_g = 33,6 \cdot 10^4$ J/kg
- căldura de vaporizare a apei $\lambda_v = 2,250 \cdot 10^6$ J/kg
- accelerația gravitației $g = 10$ m/s².

Se neglijează frecarea gheții cu aerul și pierderile de căldură [7].

Rezolvare. Procedînd la fel ca în exemplul precedent am reprezentat pe axa Ot° temperaturile tuturor corpurilor, starea finală de echilibru termic a sistemului și toate procesele care au loc în sistem după care s-au calculat toate diferențele de temperatură (fig. E 3.48).

Ecuatia bilanțului termic este

$$m_v \lambda_v + m_v c_a \Delta t_3 + m_c c_c \Delta t_4 + m_a c_a \Delta t_4 + m_g g h = m_g c_g \Delta t_1 + m_g \lambda_g + m_g c_a \Delta t_2$$

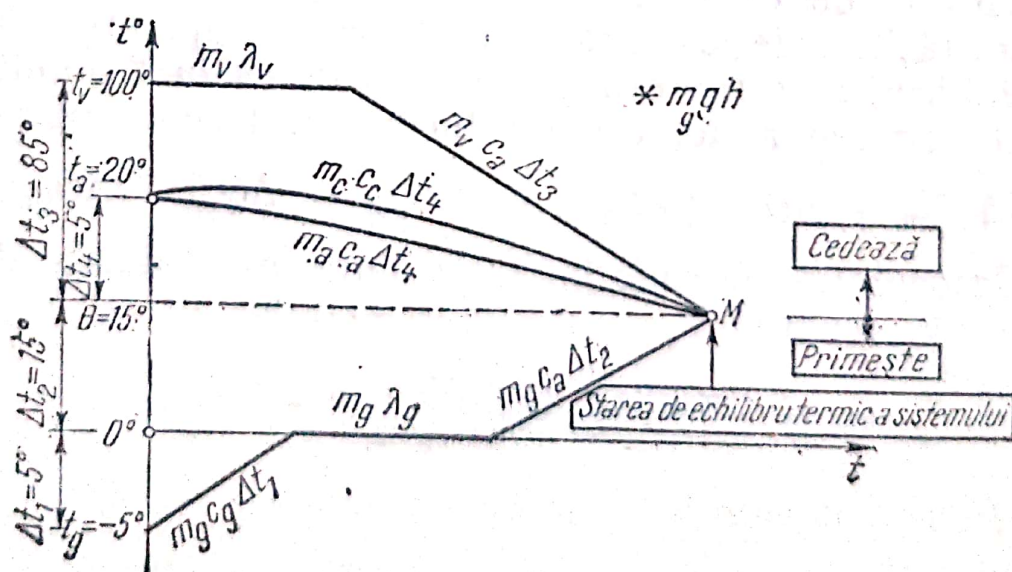


Fig. E 3.48

din care deducem

$$m_v = \frac{m_g(c_g \Delta t_1 + \lambda_g - gh + c_a \Delta t_2) - (m_c c_c + m_a c_a) \Delta t_4}{\lambda_v + c_a \Delta t_3}.$$

Înlocuind valorile numerice obținem

$$\begin{aligned} m_v &= \\ \frac{(2093 \times 5 + 33,6 \times 10^4 - 10 \times 5 + 4187 \times 15) - (10 \times 418,7 + 20 \times 4187) \times 5}{2,25 \times 10^6 + 4187 \times 85} &= \\ &= 0,144 \text{ kg.} \end{aligned}$$

E 3.49. Într-un calorimetru de alamă avînd căldura specifică $c_c = 418,7 \text{ J/kg} \cdot \text{grd}$ și masa $m_c = 0,500 \text{ kg}$ se află $m_g = 1 \text{ kg}$ gheață avînd căldura specifică $c_g = 2093 \text{ J/kg} \cdot \text{grd}$ la temperatura $t_1 = -10^\circ\text{C}$. În calorimetru se toarnă apă caldă avînd temperatura $t_2 = 55^\circ\text{C}$. Se cere:

Experiența I. Ce cantitate de apă m_a va trebui să turnăm spre a obține în calorimetru numai gheață la temperatura 0°C ?

Experiența II. Ce cantitate de apă caldă m'_a la temperatura de 55°C va trebui să turnăm în continuare pentru ca în calorimetru să existe numai apă la temperatura $t_3 = 5^\circ\text{C}$?

Experiența III. După ce a încetat turnarea apei se introduce în calorimetru o bucată de platină avînd $m_p = 0,500 \text{ g}$, temperatura apei ridicîndu-se în acest caz cu 5 grd . ($t_4 = 10^\circ\text{C}$). Se cere să se determine temperatura inițială t_p a bucății de platină.

Se dau:

- căldura specifică a platinei $c_p = 134 \text{ J/kg} \cdot \text{grd}$
- căldura de topire a gheții $\lambda = 335 \text{ kJ/kg}$.

Rezolvare. Procesele care au loc în toate cele trei experiențe sînt arătate în fig. E 3.49. Ecuațiile de echilibru termic se obțin egalînd suma cantităților de căldură aflate în partea hașurată într-un sens cu cele aflate în partea hașurată în celălalt sens. După scrierea ecuațiilor și înlocuirea valorilor numerice se obține

$$m_a = 0,039 \text{ kg}; m'_a = 1,771 \text{ kg}; t_p = 903,6^\circ\text{C}.$$

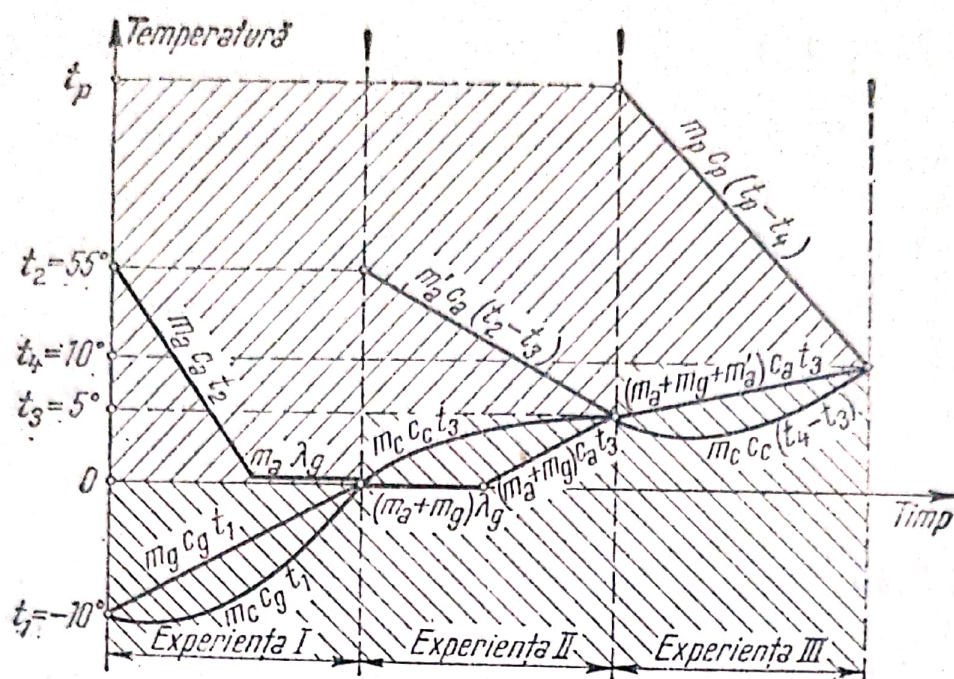


Fig. E 3.49

3.13. Metoda ecuației și a transformărilor de stare

3.13.1. *Principiul metodei; domeniu de aplicabilitate.* Metoda ecuației de stare se aplică în problemele în care sistemul material care evoluează este un gaz ideal, care trece prin două sau mai multe stări succesive.

Ea are la bază ecuația de stare a gazelor ideale și poate fi aplicată fie monopozitional, pentru aflarea relației între parametri ce caracterizează o anumită stare a unui gaz, fie bipozitional, spre a determina relația dintre parametri ce caracterizează două stări succesive ale aceluiași gaz.

3.13.2. *Noțiuni de bază; definiții; notații; relații.* La această metodă intervin următoarele mărimi ce pot varia în decursul evoluției gazului (fig. 3.24):

- p — presiunea gazului (N/m^2),
- v — volumul gazului (m^3),
- T — temperatura gazului ($^{\circ}\text{K}$),
- m — masa gazului (kg),
- n — numărul de moli ai gazului (mol),
- ρ — densitatea gazului (kg/m^3),
- U — energia internă a gazului (J).

Între aceste mărimi există relațiile arătate în fig. 3.28, în care M este masa moleculară a gazului, iar R ($\text{J/mol} \cdot \text{K}$)

respectiv $\mathcal{R}(\text{J/kg} \cdot \text{K})$ constanta universală a gazelor ideale.

Dacă se consideră două stări caracterizate prin mărimile de mai sus notate în primul caz cu indicele 1, iar în cel de al doilea caz cu indicele 2, între ele există în cazul cel mai general relațiile arătate în fig. 3.29.

În anumite cazuri particulare relațiile menționate capătă una din formele:

— cantitatea constantă de gaz ($n_1 = n_2 = n$; $m_1 = m_2 = m$)

$$\frac{p_1 v_1}{T_1} = \frac{p_2 v_2}{T_2} = nR = m\mathcal{R}.$$

Din această relație rezultă trei relații și mai particulare denumite respectiv:

— transformarea izocoră ($v_1 = v_2 = v$): $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = \frac{nR}{v} = \frac{m\mathcal{R}}{v}$;

— transformarea izobară ($p_1 = p_2 = p$): $\frac{v_1}{T_1} = \frac{v_2}{T_2} = \frac{nR}{p} = \frac{m\mathcal{R}}{p}$;

— transformarea izotermă ($T_1 = T_2 = T$): $p_1 v_1 = p_2 v_2 = nRT = m\mathcal{R}T$.

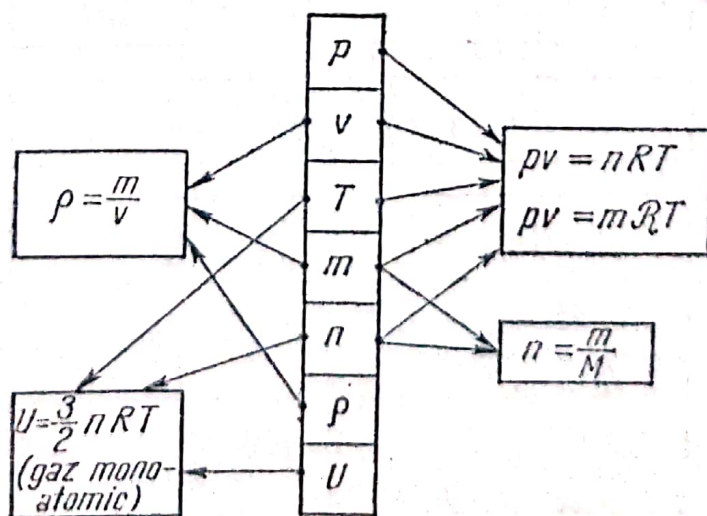


Fig. 3.28

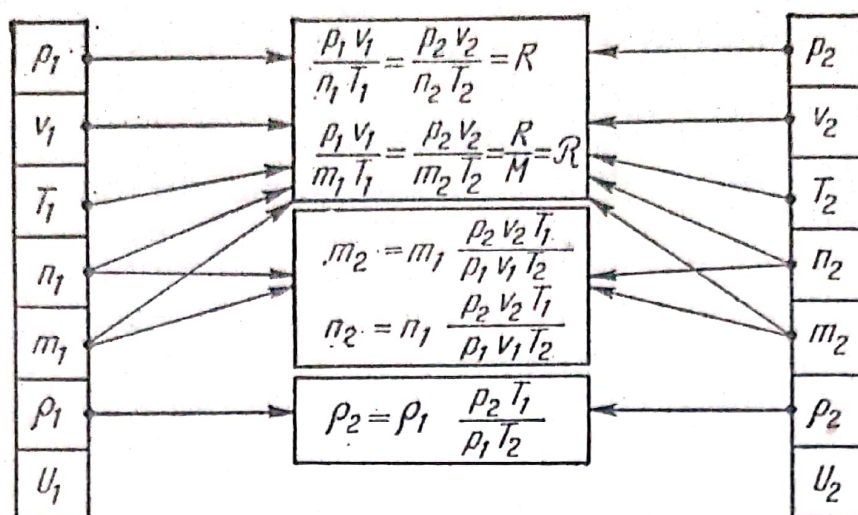


Fig. 3.29

Pe lângă mărimile menționate mai există altele, care sînt specifice celor două stări ale unui gaz (mărimi de proces); acestea sînt (fig. 3.29):

- ΔU_{12} — variația energiei interne a gazului;
- Δm_{12} — variația masei gazului;
- Δn_{12} — variația numărului de moli ai gazului;
- L_{12} — lucrul mecanic absorbit ($L_{12} < 0$) sau cedat ($L_{12} > 0$) de gaz la trecerea din starea 1 în starea 2;
- Q_{12} — cantitatea de căldură absorbită ($Q_{12} > 0$) sau cedată ($Q_{12} < 0$) de un gaz la trecerea din starea 1 în starea 2.

Valorile particulare ale acestor mărimi pentru transformările clasice sînt arătate în fig. 3.30.

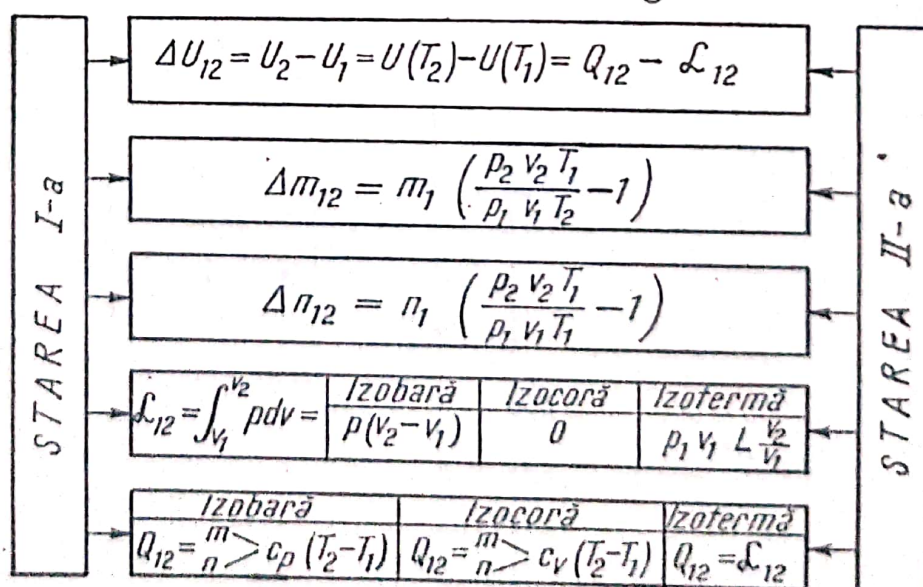


Fig. 3.30

În relațiile care descriu transformările gazelor apar pe lângă mărimile de stare, în general variabile, o serie de mărimi constante.

Două sînt criteriile în raport cu care trebuie considerate mărimile, ce rămîn constante, în decursul transformărilor gazelor: *natura* și *starea* gazului; din aceste puncte de vedere avem:

— mărimi ce nu depind de starea gazului ci numai de natura sa (ex.: masa moleculară M);

— mărimi ce nu depind de natura gazului ci numai de starea sa (ex.: volumul ocupat de un mol de gaz, care nu depinde de natura gazului: la 0° și 760 mm Hg volumul molar este $V_{M_0} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol}$, la 20° și 760 mm Hg avem $V_M = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol}$; numărul de molecule conținut de un centimetru cub de gaz în condiții normale $n_0 = \mathcal{N}/V_M = 2,7 \cdot 10^{19} \text{ molecule/cm}^3$);

— mărimi ce nu depind nici de starea gazului nici de natura sa denumite constante universale (fig. 3.31).

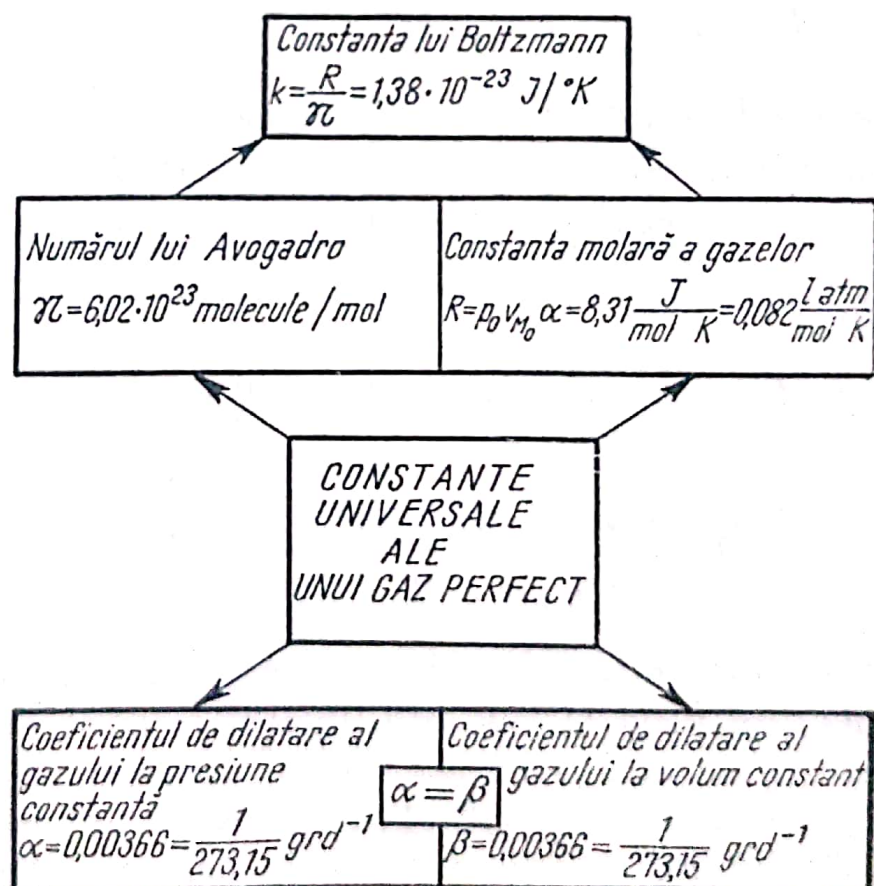


Fig. 3.31

Există deci constante în raport cu starea gazului, constante în raport cu natura gazului și constante în raport cu ambele (constante universale).

Vom spune că un gaz evoluează după un *ciclu* dacă el parcurge mai multe transformări, astfel încât starea sa finală coincide cu starea inițială; din acest motiv, pe parcursul unui ciclu variația energiei interne a gazului este nulă ($\Delta U = U_{final} - U_{initial} = 0$).

Pe parcursul unui ciclu gazul schimbă (primește și cedează) căldură și lucru mecanic. Dacă notăm cu Q și L cantitatea de căldură totală, respectiv lucrul mecanic, schimbate de gaz cu mediul exterior, în baza observației de mai sus avem

$$\Delta U = Q - L \text{ adică } 0 = Q - L \Rightarrow Q = L$$

în care

$$Q = Q_a - |Q_c| \text{ sau } Q = Q_a + Q_c$$

$$L = L_c - |L_a| \text{ sau } L = L_c + L_a$$

indicii a și c însemnând respectiv „absorbit” și „cedat”.

În diagrama pOv lucrul mecanic total L efectuat de un gaz este egal cu aria suprafeței mărginite de ciclul parcurs de gaz.

Raportul

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{L}{Q_a} = \frac{\text{aria ciclului}}{Q_a} = \frac{Q}{Q_a} = \frac{Q_a - |Q_c|}{Q_a} = \\ &= 1 - \frac{|Q_c|}{Q_a} = \frac{Q_a + Q_c}{Q_a} = 1 + \frac{Q_c}{Q_a} \end{aligned}$$

reprezintă *randamentul* ciclului respectiv (raportul dintre energia utilă și cea consumată).

Randamentul unui ciclu este un număr adimensional, pozitiv și subunitar, el putînd fi dat și în procente

$$\eta = \frac{L}{Q_a} \cdot 100 \text{ (\%)}. \quad \cdot$$

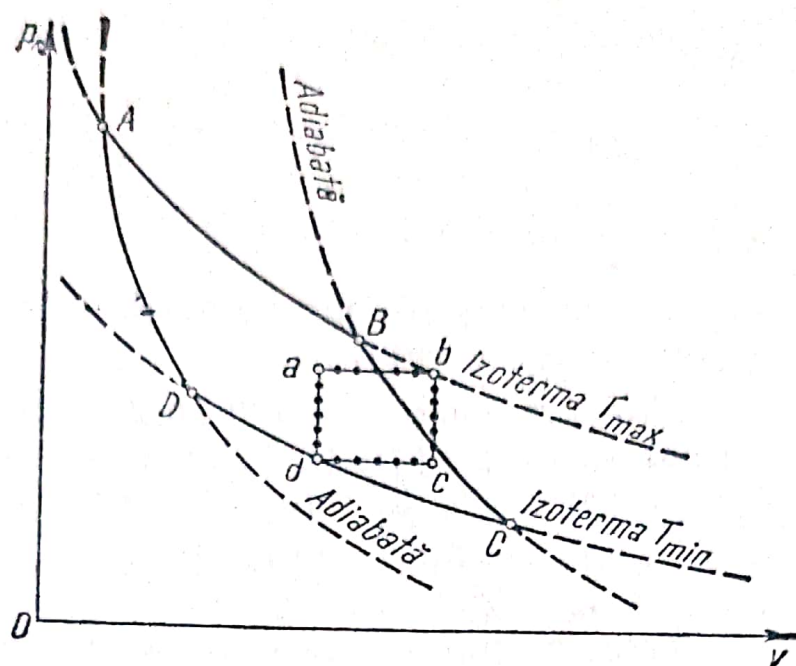


Fig. 3.32

În timp ce randamentul unei mașini mecanice nu poate depăși pe cel al mașinii mecanice ideale care este $\eta_{im} = 1$, randamentul unei mașini termice nu poate depăși pe cel al mașinii termice ideale care funcționează între aceleași temperaturi maximă și minimă ca și mașina considerată, randament care este subunitar ($\eta_{it} < 1$).

Mașina termică ideală este acea mașină termică ce funcționează după ciclul *Carnot* al cărei randament este

$$\eta = \frac{Q_a - |Q_c|}{Q_a} = \frac{T_{max} - T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}}.$$

Ciclul ideal este alcătuit din două adiabate și două izoterme.

În fig. 3.32 este arătat un ciclu Carnot *ABCD* comparativ cu un alt ciclu *abcd* alcătuit din două izobare și două izocore care funcționează între aceleași limite de temperatură.

Lucrul mecanic efectuat de o mașină cu simplu efect este egal cu aria diagramei ciclului parcurs de gazul care evoluează în mașina respectivă, iar la mașinile cu dublu efect, cu dublul acestei arii.

aceste stări. Se determină cu această ocazie mărimile necunoscute sau anumite relații dintre ele;

e) se determină mărimile de proces cerute în problemă: Q_{12} , L_{12} , m_{12} , ...

3.13.5. Indicații și precizări. Există indicația specială cu privire la aplicarea acestei metode, că relațiile de mai sus sînt valabile numai pentru o anumită cantitate dintr-un același gaz, constantă sau variabilă în trecerea de la o stare la alta.

3.13.6. Exemple de aplicare a metodei

E 3.50. Un kmol de azot se află într-un cilindru orizontal, cu piston mobil, la presiunea $p_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ și temperatura $t_1 = 27^\circ\text{C}$. Se dau: presiunea atmosferică $p_a = 10^5 \text{ N/m}^2$, $R = 8315 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$, $m = 14 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$ pentru azot.

Se cer:

- volumul inițial al gazului;
- temperatura finală și lucrul mecanic produs de gaz la încălzirea lui izobară pînă la triplarea volumului;
- volumul la care ajunge gazul după destinderea izotermă pînă la presiunea $p_3 = 3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$;
- masa de gaz care trebuie să iasă din cilindru cînd se readuce pistonul la poziția inițială menținînd temperatura și presiunea constante, adică egale cu cele din starea precedentă [15,6/69].

Rezolvare. Gazul de care ne ocupăm este azotul, care — după informațiile din problemă — trece prin patru stări, la ultima dintre ele ajungînd prin schimbarea masei:

— starea I: $p_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$; $v_1 = ?$; $T_1 = 273 + 27 = 300^\circ\text{K}$

— starea a II-a: $p_2 = ?$; $v_2 = 3v_1$; $T_2 = ?$

— starea a III-a: $p_3 = 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$; $v_3 = ?$ $T_3 = T_2 = ?$

— starea a IV-a: $p_4 = p_3 = 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$; $v_4 = v_1 = ?$; $T_4 = T_3 = ?$

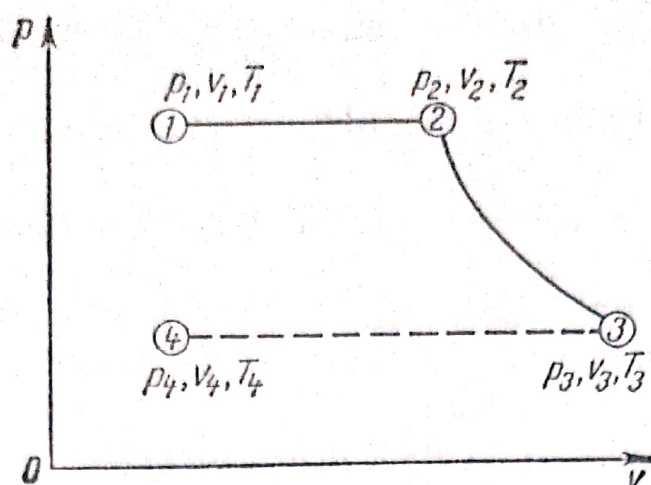


Fig. E 3.50

Reprezentarea în diagrama pOv a acestor procese prin care trece gazul este arătată în fig. E 3.50.

Ultima evoluție a fost desenată cu linie întreruptă spre a atrage atenția asupra faptului că în timpul în care ea are loc variază masa gazului.

În continuare determinăm mărimile de stare ale gazului în cele patru stări menționate; prin aplicarea ecuației de stare a gazului în starea I avem

$$p_1 v_1 = nRT_1$$

din care rezultă

$$v_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = \frac{1 \times 8315 \times 300}{4 \times 10^5} = 6,237 \text{ m}^3.$$

Starea I este astfel determinată.

Pentru determinarea mărimilor din starea a II-a folosim relația dintre stările I și II

$$\frac{v_2}{T_2} = \frac{v_1}{T_1}$$

din care rezultă

$$T_2 = \frac{v_2 T_1}{v_1}.$$

Din informațiile date în problemă rezultă

$$v_2 = 3v_1$$

cu care avem

$$T_2 = 3T_1 = 3 \times 300 = 900 \text{ K.}$$

Mai rezultă

$$p_2 = p_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

deoarece prima transformare este izobară. Starea a II-a este astfel determinată.

Pentru determinarea mărimilor din starea a III-a observăm că

$$T_3 = T_2 = 900 \text{ K.}$$

Prin aplicarea ecuației de stare între stările II și III rezultă

$$p_3 v_3 = p_2 v_2$$

de unde

$$v_3 = \frac{p_2 v_2}{p_3} = \frac{4 \times 10^5 \times 3 \times 6,237}{2 \times 10^5} = 37,422 \text{ m}^3.$$

Starea a III-a este astfel determinată.

În starea a IV-a avem:

$$v_4 = v_1 = 6,237 \text{ m}^3; \quad T_4 = T_3 = 900 \text{ K.}$$

Lucrul mecanic produs de gaz la încălzirea izobară este (lucrul la piston)

$$L = (p_1 - p_a) (v_2 - v_1) = 3 \times 10^5 \times 2 \times 6,237 = 3,74 \text{ MJ}$$

Masa de gaz care trebuie să iasă din cilindru între stările III și IV este

$$\Delta m_{34} = m_3 \left(\frac{p_4 v_4 T_3}{p_3 v_3 T_4} - 1 \right)$$

sau, ținând seama de informațiile din enunț,

$$\begin{aligned} \Delta m_{34} &= m_1 \left(\frac{v_1}{v_3} - 1 \right) = M n_1 \left(\frac{v_1}{v_3} - 1 \right) = \\ &= 2 \times 14 \times 1 \left(\frac{6,237}{37,422} - 1 \right) = -23,5 \text{ kg.} \end{aligned}$$

E 3.51. Într-un cilindru se află o masă de aer la presiunea $p_1 = 10^5 \text{ N/m}^2$, temperatura $t_1 = 27^\circ\text{C}$, ocupînd un volum $V_1 = 30 \text{ dm}^3$. Gazul din cilindru este supus la următoarea succesiune de transformări:

- o încălzire izocoră pînă la presiunea $p_2 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$,
- o destindere izobară pînă la un volum $V_3 = 60 \text{ dm}^3$,
- o răcire izocoră pînă la presiunea $p_4 = p_1$ și
- o comprimare izobară pînă la starea inițială.

Cunoscînd.

$\rho_0 = 1,293 \text{ g/dm}^3$ — densitatea aerului în condiții normale,

$c_v = 0,723 \text{ J/g} \cdot \text{grd}$; $c_p = 1,010 \text{ J/g} \cdot \text{grd}$ — căldurile specifice la volum și, respectiv, la presiune constantă ale aerului, se cere să se calculeze:

- a) masa m a aerului aflat în cilindru;
- b) temperaturile gazului la sfîrșitul fiecărei transformări;
- c) lucrul mecanic efectuat și cantitatea de căldură primită de aerul din cilindru, în fiecare din cele patru transformări;
- d) lucrul mecanic total efectuat pe întregul ciclu de transformări și cantitatea totală de căldură primită de sistem din exterior;
- e) randamentul unei mașini termice care ar funcționa după ciclul descris și randamentul unei mașini termice care ar utiliza un ciclu Carnot cu aceleași temperaturi maximă și minimă.

(Admitere IPB ,ingineri, 1970).

Rezolvare. a) Masa gazului se determină din relația

$$m = \rho_1 v_1$$

unde ρ_1 este densitatea gazului la temperatura t_1 , iar v_1 volumul gazului la aceeași temperatură.

Trebuie determinată mai întîi densitatea ρ_1 cunoscînd pe ρ_0 ; rezultă

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{p_1 T_0}{p_0 T_1} = 1,293 \frac{10^5 \times 273}{10^5 \times 300} = 1,18 \text{ g/dm}^3.$$

Rezultă

$$m = \rho_1 v_1 = 1,18 \times 30 = 35,4 \text{ g}.$$

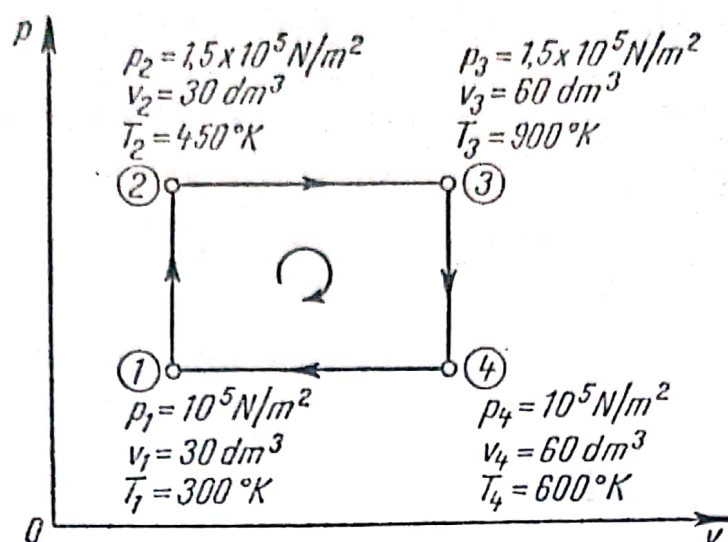


Fig. E 3.51

b) Parametrii stărilor 1... 4 sînt (fig. E 3.51):

Starea I

$$p_1 = 10^5 \text{ N/m}^2, v_1 = 30 \text{ dm}^3, T_1 = 273 + 27 = 300 \text{ K (date)}$$

Starea a II-a

$$v_2 = v_1 = 30 \text{ dm}^3 \text{ (izocoră)}; p_2 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ (dat)}$$

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{T_1 p_2}{p_1} = \frac{300 \times 1,5 \times 10^5}{10^5} = 450 \text{ K}$$

Starea a III-a

$$p_3 = p_2 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ (izobară)}; v_3 = 60 \text{ dm}^3 \text{ (dat)}$$

$$\frac{v_3}{T_3} = \frac{v_2}{T_2} \Rightarrow T_3 = T_2 \frac{v_3}{v_2} = 450 \frac{60}{30} = 900 \text{ K}$$

Starea a IV-a

$$p_4 = p_1 = 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ (izobară)}; v_4 = v_3 = 60 \text{ dm}^3 \text{ (izocoră)}$$

$$T_4 = T_3 \frac{p_4}{p_3} = 900 \frac{10^5}{1,5 \times 10^5} = 600 \text{ K.}$$

$$\text{Verificare: } T_4 = T_1 \frac{v_4}{v_1} = 300 \frac{60}{30} = 600 \text{ K.}$$

Caracteristicile ciclului sînt arătate în fig. 3.51.

c) Lucrul mecanic și cantitatea de căldură în fiecare din cele patru transformări au valorile:

$$L_{1-2} = 0 \text{ (izocoră)}$$

$$L_{2-3} = p_2(v_3 - v_2) = 1,5 \times 10^5 (60 - 30) \times 10^{-3} = 4500 \text{ J (cedat)}$$

$$L_{3-4} = 0 \text{ (izocoră)}$$

$$L_{4-1} = p_1(v_1 - v_4) = 10^5 \times (30 - 60) \times 10^{-3} = -3000 \text{ J (primit)}$$

$$Q_{12} = mc_v (T_2 - T_1) = 35,4 \times 0,723 \times (450 - 300) = 3839 \text{ J (primit)}$$

$$Q_{23} = mc_p (T_3 - T_2) = 35,4 \times 1,01 \times (900 - 450) = 16.089 \text{ J (primit)}$$

$$Q_{34} = mc_v (T_4 - T_3) = 35,4 \times 0,723 \times (600 - 900) = -7678 \text{ J (cedat)}$$

$$Q_{41} = mc_p (T_1 - T_3) = 35,4 \times 1,01 \times (300 - 600) = -10726 \text{ J (cedat)}$$

d) Lucrul mecanic total și cantitatea de căldură totală au valorile

$$L = L_{12} + L_{23} + L_{34} + L_{41} = 4500 - 3000 = 1500 \text{ J.}$$

Verificare. Lucrul mecanic total trebuie să fie egal cu aria ciclului adică

$$L = (v_4 - v_1) (p_2 - p_1) = (60 - 30) \times 10^{-3} \times (1,5 - 1) \times 10^5 = 1500 \text{ J}$$

$$Q = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41} = 3839 + 16\,089 - 7678 - 10726 = 1524 \text{ J.}$$

Cantitatea totală de căldură primită este

$$Q_p = Q_{12} + Q_{23} = 3839 + 16089 = 19928 \text{ J.}$$

O altă verificare este dată de principiul I al termodinamicii în baza căruia

$$L = Q$$

Egalitatea este verificată, cu mici aproximații din cauza erorilor de calcul.

e) Randamentul unei mașini care ar funcționa după ciclul descris este

$$\eta = \frac{L}{Q_{abs}} = \frac{1500}{19926} = 0,075 = 7,5 \%$$

Randamentul unei mașini care ar utiliza un ciclu Carnot cu aceleași temperaturi maximă și minimă este

$$\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{300}{900} = 1 - \frac{1}{3} = 0,67 = 67\%.$$

Se observă că $\eta < \eta_c$ ceea ce era de așteptat, ciclul Carnot avînd cel mai mare randament termic.

E 3.52. Un motor termic utilizînd drept agent o cantitate de 2 moli heliu, funcționează după un ciclu format din două izobare și două izocore (fig. E 3.52). Cunoscînd valorile presiunilor și volumelor corespunzînd cantității de heliu în stările B și D :

$$p_B = 2 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}, \quad V_B = 83 \text{ l, respectiv } p_D = 10^5 \frac{N}{m^2},$$

$V_D = 166,2 \text{ l}$, se cere să se determine:

- Temperaturile la care se află heliul în stările A, B, C și D .
- Lucrul mecanic efectuat de gaz în cursul destinderii izobare.
- Lucrul mecanic efectuat de gaz în cursul unui ciclu.
- Cantitatea de căldură pe care trebuie s-o primească gazul pentru a parcurge o dată ciclul descris.
- Randamentul motorului.

Se dă constanta gazelor perfecte: $R = 8,31 \frac{J}{mol \cdot ^\circ C}$,

(Admitere IPB, ingineri, 1973)

Rezolvare. a) Gazul de care ne ocupăm este heliul (gaz monoatomic) de cantitate constantă $n = 2$ moli în tot timpul evoluției sale. Stările succesive ale acestei evoluții alcătuiesc un ciclu reprezentat în

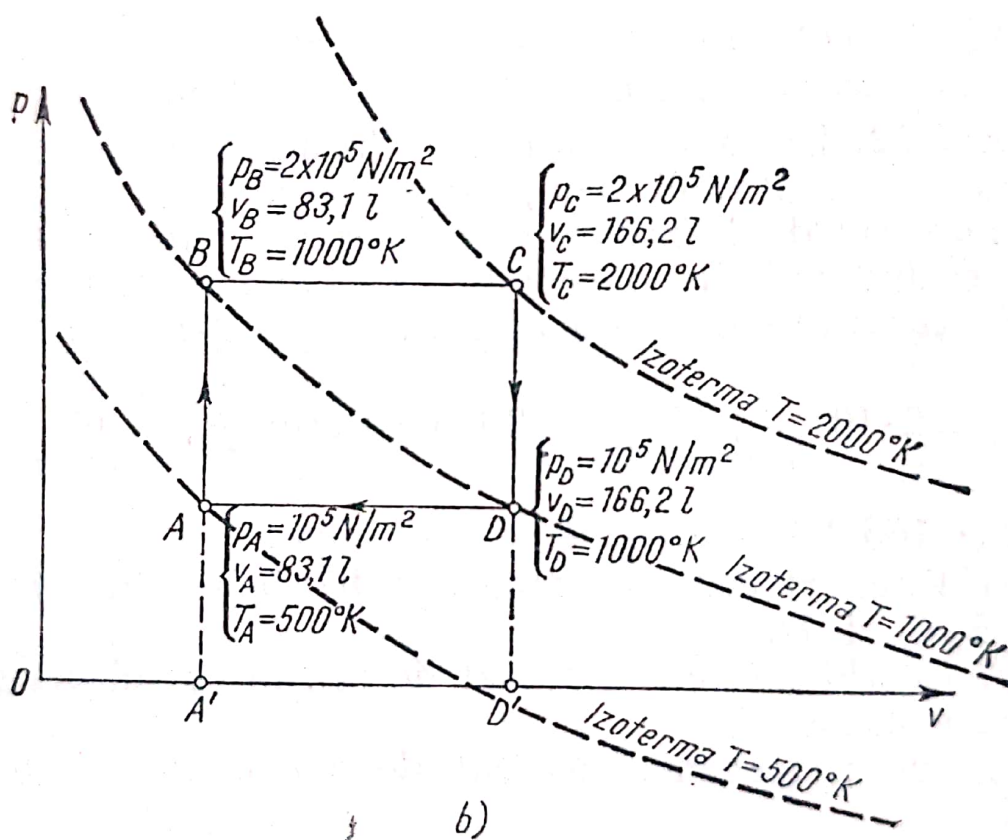
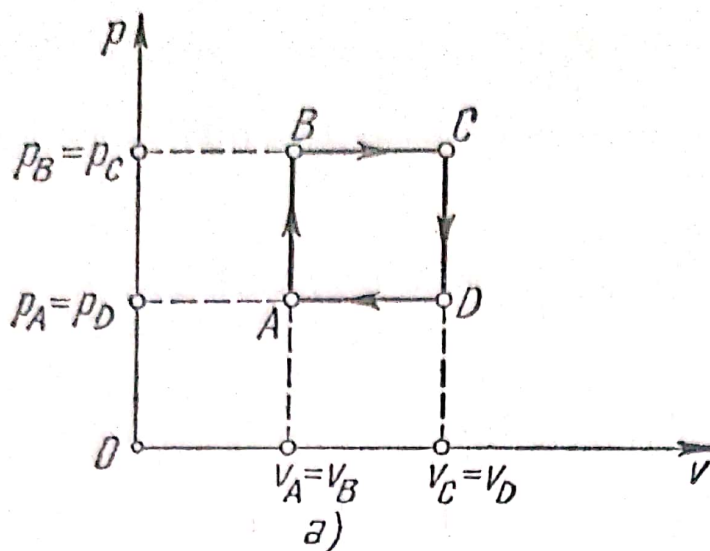


Fig. E 3.52

fig. E 3.52, a. Parametrii celor patru stări reprezentate prin punctele A, B, C și D în diagrama pOv sînt respectiv:

Starea A

$$p_A = p_D = 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ (dat); } v_A = 83,1 \text{ l (dat).}$$

Temperatura T_A se determină prin aplicarea ecuației de stare a gazului în A ; rezultă

$$p_A v_A = nRT_A \Rightarrow T_A = \frac{p_A v_A}{nR} = \frac{10^5 \times 83,1 \times 10^{-3}}{2 \times 8,31} = 500 \text{ K.}$$

Starea B

$$p_B = 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ (dat); } v_B = v_A = 83,1 \text{ l (dat).}$$

Temperatura T_B se determină prin aplicarea ecuației de stare bipozițională între stările A și B ; rezultă:

$$\frac{p_B v_B}{T_B} = \frac{p_A v_A}{T_A} \Rightarrow \frac{p_B}{T_B} = \frac{p_A}{T_A} \Rightarrow T_B = T_A \frac{p_B}{p_A} = 500 \frac{2 \times 10^5}{10^5} = 1000 \text{ K.}$$

Starea C

$$p_C = p_B = 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ (dat); } v_C = v_D = 166,2 \text{ l (dat).}$$

Temperatura T_C se determină prin aplicarea ecuației de stare bipozițională între stările B și C ; rezultă

$$\frac{p_C v_C}{T_C} = \frac{p_B v_B}{T_B} \Rightarrow \frac{v_C}{T_C} = \frac{v_B}{T_B} \Rightarrow T_C = T_B \frac{v_C}{v_B} = 1000 \frac{166,2}{83,1} = 2000 \text{ K.}$$

Starea D

$$p_D = p_0 = 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ (dat); } v_D = 166,2 \text{ l (dat).}$$

Temperatura în starea D se determină prin aplicarea ecuației de stare bipozițională între stările C și D ; rezultă

$$\frac{p_D v_D}{T_D} = \frac{p_C v_C}{T_C} \Rightarrow \frac{p_D}{T_D} = \frac{p_C}{T_C} \Rightarrow T_D = T_C \frac{p_D}{p_C} = 2000 \frac{10^5}{2 \times 10^5} = 1000 \text{ K.}$$

Observații. Rezultă că punctele B și D se află pe aceeași izotermă.

Temperaturile cerute în enunț puteau fi determinate și prin aplicarea ecuației de stare monopozitională în stările B , C și D ; vom folosi aceasta ca verificare. Trebuie să avem

$$\frac{p_A v_A}{T_A} = \frac{p_B v_B}{T_B} = \frac{p_C v_C}{T_C} = \frac{p_D v_D}{T_D} = nR$$

adică

$$\begin{aligned} \frac{10^5 \times 83,1 \times 10^{-3}}{500} &= \frac{2 \times 10^5 \times 83,1 \times 10^{-3}}{1000} = \\ &= \frac{2 \times 10^5 \times 166,2 \times 10^{-3}}{2000} = \frac{10^5 \times 166,2 \times 10^{-3}}{1000} = 2 \times 8,31 \end{aligned}$$

ceea ce este adevărat.

Diagrama completă conținând coordonatele tuturor stărilor este arătată în fig. E 3.52, b.

b) Trebuie identificată destinderea izobară. Pe figură există două izobare: BC și DA ; prima este parcursă de la B către C adică în sensul creșterii volumelor (destindere), iar cea de a doua de la D către A , adică în sensul scăderii volumelor comprimare. Destinderea izobară este deci evoluția BC .

Lucrul mecanic cerut este egal cu aria de sub această evoluție, adică cu aria dreptunghiului $A'BCD'$; avem

$$\begin{aligned} L_{BC} &= p_B(v_C - v_B) = 2 \times 10^5(166,2 - 83,1) \times 10^{-3} = \\ &= 16620 \text{ J} = 16,62 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

c) Lucrul mecanic efectuat de gaz în cursul unui ciclu este egal cu aria ciclului (aria unui dreptunghi)

$$\begin{aligned} L &= AD \times AB = (v_D - v_A)(p_B - p_A) = (166,2 - \\ &- 83,1)(2 \times 10^5 - 10^5) \times 10^{-3} = 8310 \text{ J} = 8,31 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

d) Dacă am fi cunoscut căldurile specifice c_p și c_v răspunsul la acest punct s-ar fi obținut prin însumarea cantităților de căldură pe parcursul celor două evoluții ale sale pe care primește căldură: AB și BC . Cum acestea nu sînt cunoscute va trebui să facem apel la relația

$$U_{AC} = Q_{AC} - L_{AB}$$

în care

$$U_{AC} = \frac{3}{2} nR(T_C - T_A) = 1,5 \times 2 \times 8,31 (2000 - 500) = 37395 \text{ J} = 37,4 \text{ kJ}.$$

$$L_{AC} = L_{AB} + L_{BC} = 0 + 16620 = 16620 \text{ J} = 16,62 \text{ kJ}.$$

Rezultă drept căldură primită de gaz

$$Q_{AC} = U_{AC} + L_{AC} = 37,4 + 16,62 = 54 \text{ kJ}.$$

e) Randamentul motorului este

$$\eta = \frac{L}{Q_{abs}} = \frac{\text{Aria ciclului}}{Q_{AC}} = \frac{8,31}{54} \approx 0,15 = 15\%.$$

E 3.53. O mașină cu vaporii cu simplu efect are următoarele caracteristici: cursa pistonului $l = 0,5 \text{ m}$, diametrul interior al cilindrului $D = 30 \text{ cm}$, presiunea vaporilor în cazan $p_2 = 0,6 \text{ MN/m}^2$, presiunea vaporilor în condensator $p_1 = 20 \text{ kN/m}^2$, numărul învîrtiturilor $n = 100 \text{ rot/min}$.

Un indicator Watt atașat mașinii dă o diagramă trapezoidală (fig. E 3.53) cu următoarele dimensiuni: $AB = 10 \text{ mm}$, $CD = 50 \text{ mm}$, $AD = 29 \text{ mm}$, $\sphericalangle BAD = 90^\circ$, $\sphericalangle ADC = 90^\circ$.

Se cere să se determine:

- lucrul mecanic dezvoltat în interiorul cilindrului, la o deplasare a pistonului;
- puterea mașinii [7].

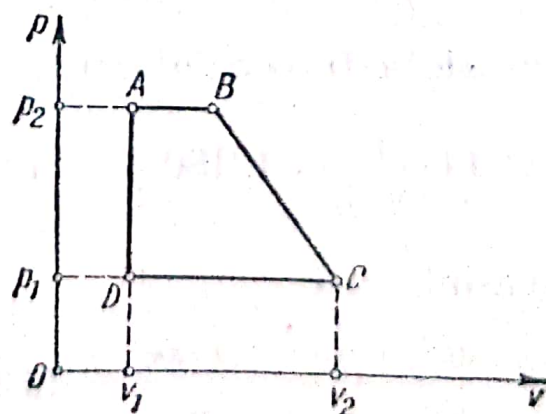


Fig. E 3.53

Rezolvare. a) Lucrul mecanic dezvoltat în interiorul cilindrului este egal cu aria diagramei

$$L = \frac{1}{2} (DC + AB) \cdot DA = \frac{1}{2} (50 + 10) \times 29 = 870 \text{ mm}^2$$

Pentru a exprima această arie în unități de lucru mecanic (Jouli) vom raționa astfel:

— la $AD = 29 \text{ mm}$ corespunde

$$p_2 - p_1 = 600 - 20 = 580 \text{ kN/m}^2$$

— la 1 mm de ordonată corespunde

$$\frac{580}{29} = 20 \text{ kN/m}^2 \cdot \text{mm}.$$

— la $DC = 50 \text{ mm}$ corespunde

$$v_2 - v_1 = Sl = \frac{\pi \cdot 0,3^2}{4} \times 0,5 = 0,0353 \text{ m}^3$$

— la 1 mm de abscisă corespunde

$$\frac{0,0353}{50} = 0,0007 \text{ m}^3/\text{mm}$$

— la 1 mm^2 de arie corespunde

$$20 \times 0,0007 \frac{\text{kN} \cdot \text{m}^3}{\text{m}^2 \cdot \text{mm}^2} = 0,014 \frac{\text{kJ}}{\text{mm}^2} = 14 \text{ J/mm}^2$$

— la întreaga arie a trapezului corespunde deci

$$870 \text{ mm}^2 \times 14 \frac{\text{J}}{\text{mm}^2} = 12180 \text{ J} = 12,18 \text{ kJ}.$$

b) Puterea mașinii este

$$P = \frac{Ln}{60} = \frac{12\,180 \times 100}{60} = \frac{121\,800}{6} = 20\,300 \text{ W} = 20,3 \text{ kW}.$$

3.14. Metoda transfigurării

3.14.1. Principiul metodei; domeniu de aplicabilitate.

Această metodă se folosește pentru calculul circuitelor electrice la care elementele de același fel (rezistoare, surse de curent) sînt astfel grupate încît pot fi determinate cu ușurință valorile mărimilor lor echivalente.

Metoda constă în reducerea rețelei electrice la forma ei cea mai simplă, formă care conține o sursă de curent echivalentă cu tensiunea electromotoare E , o rezistență interioară r și o rezistență exterioară echivalentă R . Această reducere se realizează prin folosirea relațiilor de calcul ce dau valorile echivalente ale rezistoarelor și surselor.

3.14.2. Noțiuni de bază; definiții; notații; relații

În ecuațiile acestei metode intervin următoarele mărimi:

- R_i — rezistorul i din schemă,
- R_{ij} — rezistorul echivalent rezistoarelor $i, j, \dots$ din schemă,
- r_i — rezistența interioară a generatorului de curent i din schemă,
- r_{ij} — rezistența interioară echivalentă a generatoarelor $i, j, \dots$ din schemă,
- E_i — tensiunea electromotoare a generatorului de curent i din schemă,
- E_{ij} — tensiunea electromotoare a generatorului de curent echivalent generatoarelor $i, j, \dots$, din schemă.

Relații între diverse mărimi din cadrul acestei metode

Rezistența echivalentă a mai multor rezistoare $R_1, R_2 \dots R_i$ montate în serie

$$R_{1,2, \dots, i} = \sum_1^i R_j. \quad (3.46)$$

Rezistența echivalentă a mai multor rezistoare $R_1, R_2, \dots, R_i$ montate în paralel

$$\frac{1}{R_{1,2, \dots, i}} = \sum_1^i \frac{1}{R_j}. \quad (3.47)$$

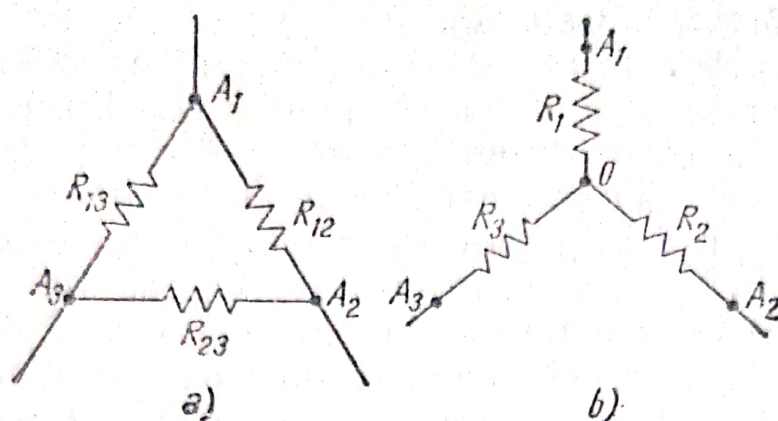


Fig. 3.34

Tensiunea electromotoare și rezistența interioară echivalente mai multor surse de curent de tensiune electromotoare $E_1, E_2, \dots, E_i$ și rezistențe interioare $r_1, r_2, \dots, r_i$ montate în serie și care debitează în același sens

$$E_{1,2, \dots, i} = \sum_1^i E_j; \quad r_{1,2, \dots, i} = \sum_1^i r_j. \quad (3.48)$$

Tensiunea electromotoare echivalentă E_e și rezistența interioară echivalentă r_e a i surse de curent identice de tensiune electromotoare E și rezistență interioară r montate în paralel și care debitează în același sens

$$E_e = E; \quad r_e = \frac{r}{i}. \quad (3.49)$$

Transformarea rezistențelor legate în triunghi din rezistențe legate în stea și invers (fig. 3.34) se face cu ajutorul relațiilor următoare:

— pentru transformarea legării din triunghi în legarea în stea

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}; \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}; \\ R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \quad (3.50)$$

— pentru transformarea legării din stea în triunghi

$$\begin{aligned} R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}; \\ R_{13} &= R_1 + R_3 + \frac{R_3 R_1}{R_2}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

În curent continuu rezistența electrică R a unui conductor este egală cu raportul dintre tensiunea electrică U aplicată conductorului considerat și intensitatea I a curentului care îl străbate (legea lui Ohm)

$$R = \frac{U}{I}. \quad (3.52)$$

Într-un circuit cu mai multe laturi în paralel suma intensităților din fiecare latură este egală cu intensitatea curentului din circuitul principal (prima teoremă a lui Kirchhoff).

$$I = \sum_1^i I_j. \quad (3.53)$$

3.14.3. *Ecuațiile metodei.* Ca ecuații pentru această metodă se folosesc relațiile de la punctul precedent.

3.14.4. *Programul metodei.* În vederea aplicării acestei metode se procedează în felul următor:

a) Din citirea problemei rezultă, în cazul în care nu este dată, schema rețelei de calculat. Când această schemă este dată, dacă este cazul se reface, astfel încât să rezulte clar modul de legare al rezistoarelor și al surselor de curent.

b) Se reduc din aproape în aproape rezistoarele din rețea la o rezistență echivalentă folosind regulile de compunere ale rezistoarelor legate în serie și paralel.

c) Se reduc din aproape în aproape generatoarele de curent din circuit la un singur generator de tensiune electromotoare echivalentă și o rezistență interioară echivalentă.

d) Se calculează folosind legea lui Ohm intensitatea curentului din circuitul echivalent schemei inițiale (intensitatea curentului din circuitul principal).

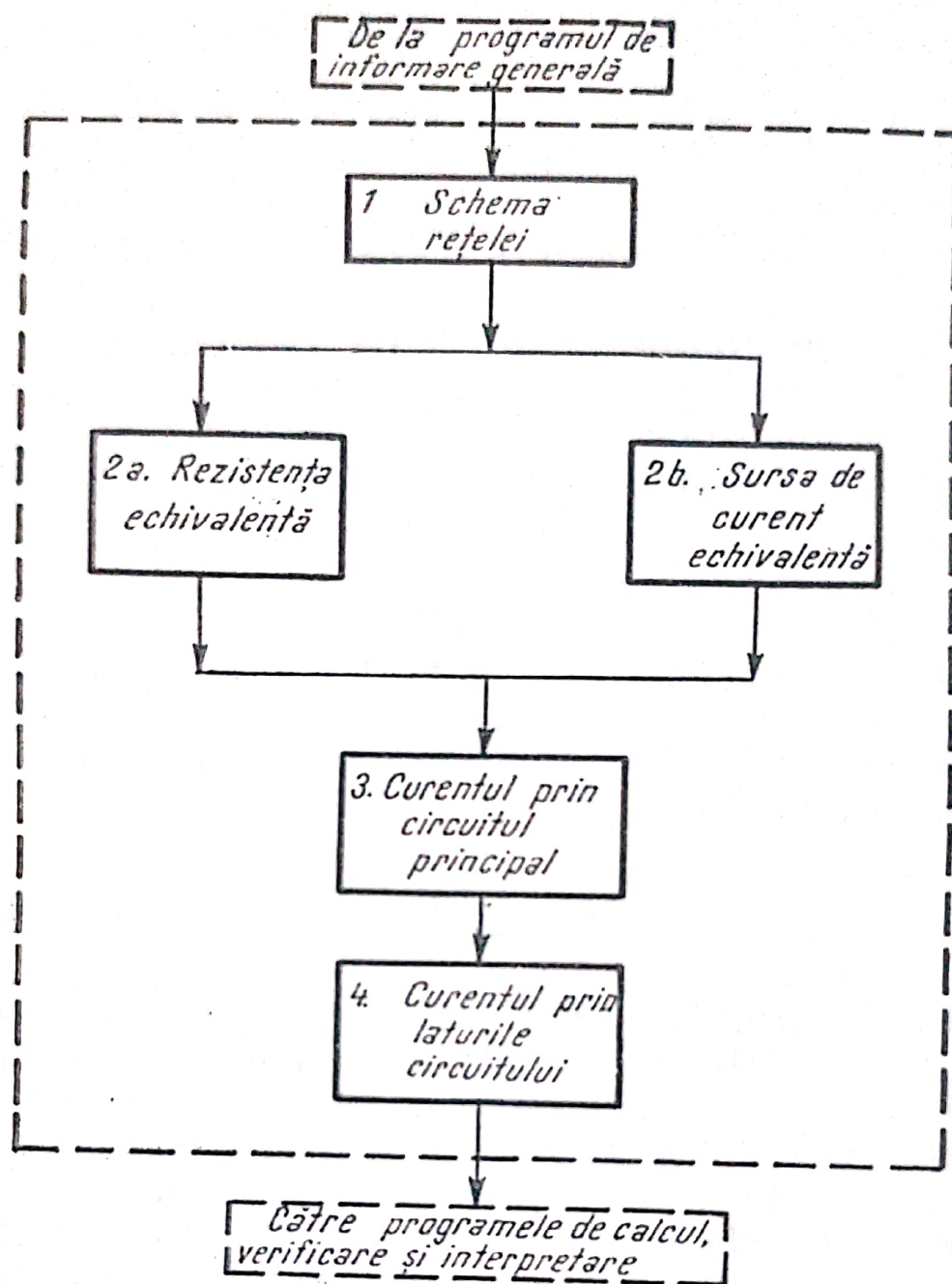


Fig. 3.35

e) Se calculează intensitatea curenților din laturile rețelei.

Programul acestei metode este prezentat schematic în fig. 3.35.

3.14.5. *Indicații și precizări.* Metoda este aplicabilă atunci când generatoarele de curent sînt montate în paralel, au caracteristici identice și debitează în același sens.

3.14.6. *Exemple de aplicare a metodei*

E 3.54. La rețeaua din fig. E 3.54, a se dau: $R_1 = 8 \Omega$; $R_2 = 1 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$, $R_5 = 1 \Omega$, $R_6 = 2 \Omega$, $R_7 = 1 \Omega$, $R_8 = 3 \Omega$, $E_1 = 2V$, $r_1 = 0,25 \Omega$, $E_2 = 1,5 V$, $r_2 = 0,5 \Omega$.

Se cere să se calculeze:

- rezistența echivalentă exterioară și interioară a întregului circuit;
- tensiunea electromotoare echivalentă a întregului circuit;
- curentul total din circuit;
- intensitatea curenților pe fiecare ramură;
- randamentul circuitului.

Rezolvare. a) Se redesenează (rețeaua) circuitul astfel încât să reiasă clar modul în care sînt legate între ele aceste rezistențe (fig. E 3.54, b).

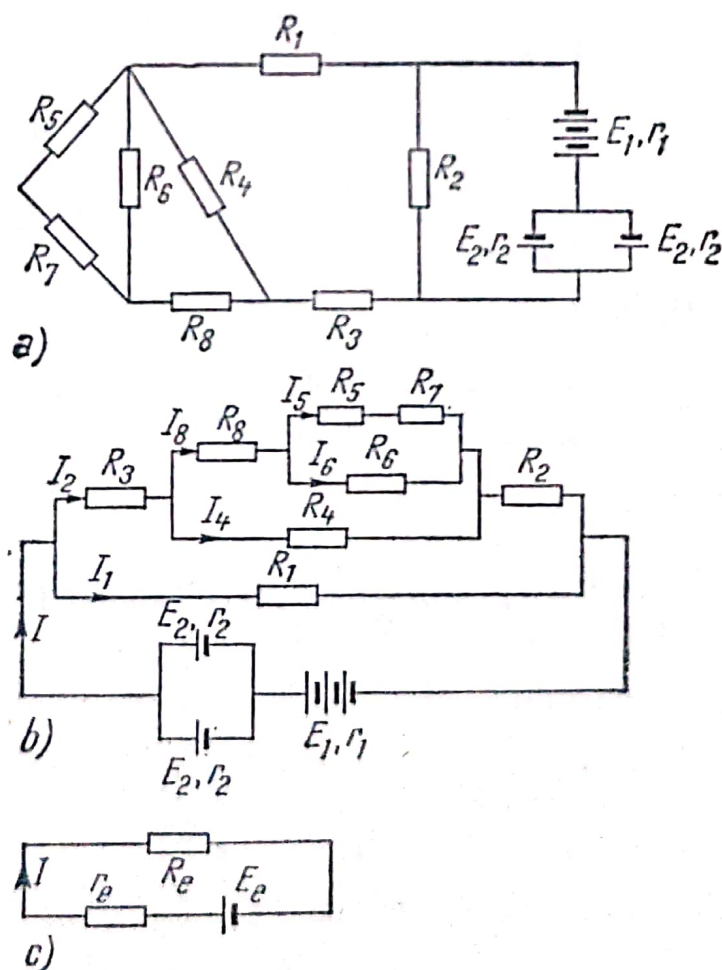


Fig. E 3.54

Se calculează rezistențele echivalente parțiale cu ajutorul relațiilor (3.46), (3.47), (3.48), (3.49)

$$R_{567} = 1 \, \Omega; \quad R_{5678} = 4 \, \Omega$$

$$R_{45678} = 2 \, \Omega; \quad R_{2345678} = 8 \, \Omega$$

$$R_e = R_{12345678} = 4 \, \Omega$$

$$r_e = \frac{r_2}{2} + 3r_1 = 1 \, \Omega.$$

b) Se reduc generatoarele de curent la un singur generator a cărui tensiune electromotoare echivalentă este (3.47), (3.48)

$$E_{12} = E_2 + 3E_1 = 1,5 + 6 = 7,5 \, \text{V}.$$

c) Se obține astfel circuitul din fig. E 3.54, c pentru care

$$I = \frac{E_e}{R_e + r_e} = \frac{7,5}{4 + 1} = 1,5 \, \text{A}.$$

d) Curenții pe fiecare ramificație au valorile

$$I_1 = \frac{R_{2345678}}{R_1 + R_{2345678}} = \frac{8}{8 + 8} 1,5 = 0,75 \, \text{A}$$

$$I_2 = 0,75 \, \text{A}$$

$$I_4 = \frac{R_{5678}}{R_4 + R_{5678}} I_2 = \frac{4}{4 + 4} 0,75 = 0,375 \, \text{A}$$

$$I_5 = 0,375 \, \text{A}$$

$$I_6 = \frac{R_{57}}{R_{57} + R_6} I_8 = \frac{2}{2 + 2} \cdot 0,375 = 0,1875 \, \text{A}$$

$$I_5 = 0,1875 \, \text{A}.$$

e) Randamentul circuitului se obține din relația

$$\eta = \frac{P_e}{P_d} = \frac{R_e}{R_e + r_e} = \frac{4}{4 + 1} = \frac{4}{5} = 0,8 = 80 \, \%.$$

E 3.55. Se cere să se calculeze rezistența totală a celor opt consumatori și intensitatea curenților din

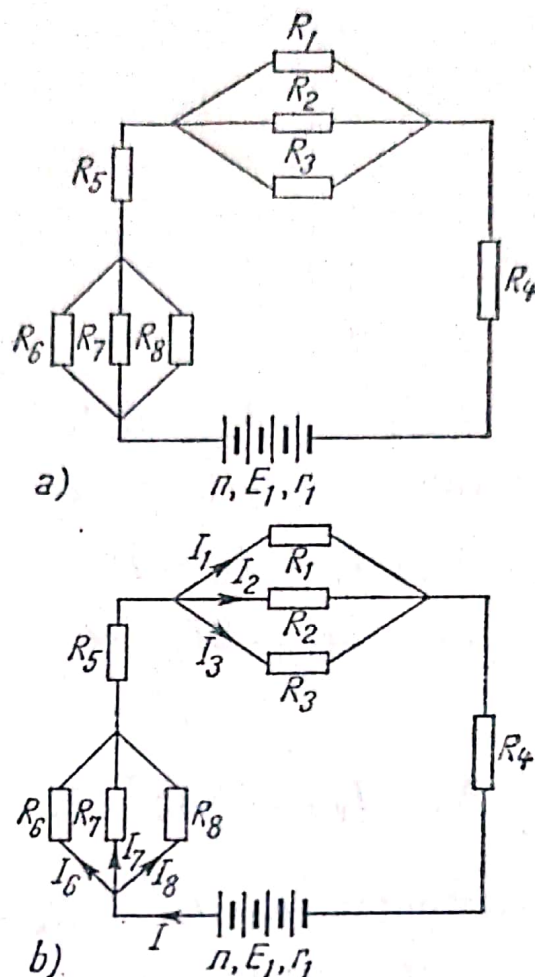


Fig. E 3.55

circuitul din figură dacă $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$, $R_5 = 5 \Omega$, $R_6 = 6 \Omega$, $R_7 = 7 \Omega$, $R_8 = 8 \Omega$; $E_1 = 3V$, $r_1 = 0,039 \Omega$, $n = 4$.

Rezolvare. Rezistența echivalentă a circuitului exterior este [v. (3.46), (3.47)]

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} + R_4 + R_5 + \\
 &+ \frac{R_6 R_7 R_8}{R_6 R_7 + R_6 R_8 + R_7 R_8} = \frac{6}{3 + 2 + 6} + 4 + 5 + \\
 &+ \frac{336}{42 + 48 + 56} = 11,845 \Omega.
 \end{aligned}$$

Mărimile caracteristice ale generatorului echivalent sînt

$$E = 4E_1 = 12 V \quad \text{și} \quad r = 4r_1 = 4 \times 0,039 = 1,56 \Omega$$

Intensitatea curentului prin circuitul principal este

$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{12}{11,845 + 0,156} = 1 \text{ A.}$$

Intensitatea curentului prin rezistențele R_1 , R_2 și R_3 se calculează din relațiile

$$I_1 + I_2 + I_3 = I$$

$$R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3.$$

Înlocuind cu valori numerice se obține

$$I_1 + I_2 + I_3 = I$$

$$I_1 = 2I_2 = 3I_3$$

de unde rezultă

$$I_1 = \frac{6}{11} \text{ A}; \quad I_2 = \frac{3}{11} \text{ A}; \quad I_3 = \frac{2}{11} \text{ A.}$$

Curenții din rezistențele R_6 , R_7 și R_8 se deduc la fel din relațiile

$$I_6 + I_7 + I_8 = I$$

$$R_6 I_6 = R_7 I_7 = R_8 I_8.$$

Înlocuind valorile numerice rezultă sistemul

$$I_6 + I_7 + I_8 = I$$

$$6I_6 = 7I_7 = 8I_8$$

din rezolvarea căruia se obține

$$I_6 = \frac{28}{73} \text{ A}, \quad I_7 = \frac{24}{73} \text{ A}, \quad I_8 = \frac{21}{73} \text{ A.}$$

E 3.56. Să se calculeze curenții din laturile circuitului cu conexiune complexă, reprezentat în fig. E 3.56, a. Valorile tensiunilor și rezistențelor sînt indicate în schema respectivă.

Rezolvare. Pentru rezolvare se folosește transfigurarea stea-triunghi, circuitul cu conexiune BCD

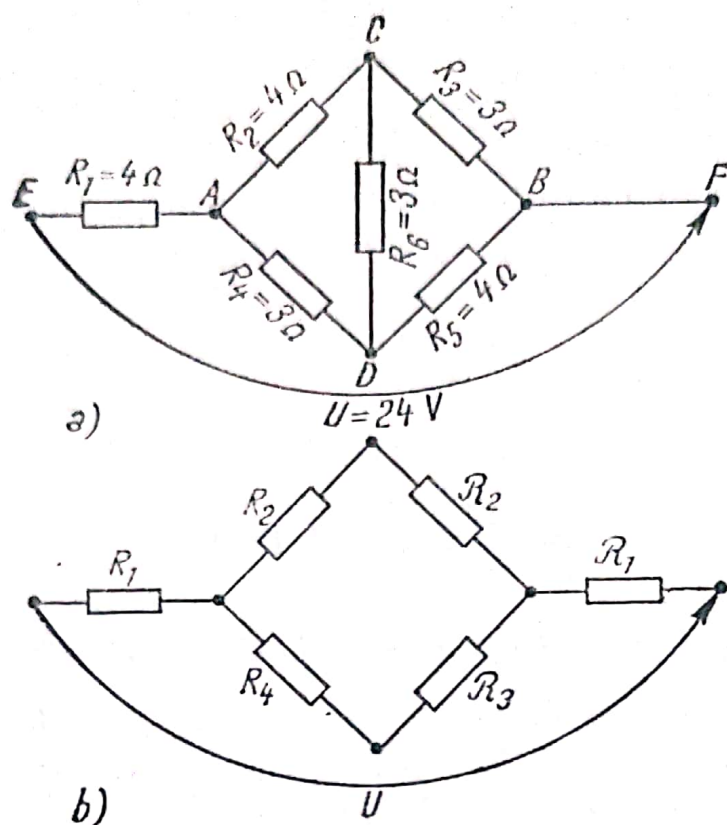


Fig. E 3.56

putînd fi înlocuit cu unul în stea, ale cărui rezistențe echivalente în raport cu accesurile BCD (fig. E 3.56, b) sînt [v. (3.50)]

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_5 + R_6} = \frac{3 \times 4}{3 + 3 + 4} = \frac{6}{5} \Omega$$

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{R_3 R_6}{R_3 + R_5 + R_6} = \frac{3 \times 3}{3 + 3 + 4} = \frac{9}{10} \Omega$$

$$\mathfrak{R}_3 = \frac{R_1 R_6}{R_3 + R_5 + R_6} = \frac{4 \times 3}{3 + 3 + 4} = \frac{6}{5} \Omega.$$

Rezistența echivalentă a noului circuit este [v.(3.46), (3.47)]

$$R = R_1 + \frac{(R_2 + \mathfrak{R}_2)(R_4 + \mathfrak{R}_3)}{R_4 + \mathfrak{R}_3 + R_2 + \mathfrak{R}_2} + \mathfrak{R}_1 = 4 + \frac{\left(4 + \frac{9}{10}\right)\left(3 + \frac{6}{5}\right)}{4 + \frac{9}{10} + 3 + \frac{6}{5}} + \frac{6}{5} = 7,47 \Omega.$$

Intensitatea curentului prin circuitul principal este

$$I = \frac{U}{R} = \frac{24}{7,47} = 3,2 \text{ A.}$$

Intensitatea curentului prin rezistența R_2 este

$$I_2 = \frac{R_4 + R_3}{R_2 + R_2 + R_4 + R_3} I = \frac{3 + \frac{6}{5}}{4 + \frac{9}{10} + 3 + \frac{6}{5}} 3,2 =$$

$$= \frac{42}{91} 3,2 = 1,48 \text{ A}$$

$$I_4 = I - I_2 = 3,2 - 1,48 = 1,72 \text{ A.}$$

Intensitatea curentului prin R_6 se calculează revenind la schema din fig. E 3.56, a și calculând căderea de tensiune între punctele D și C

$$U_{CD} = U_{AC} - U_{AD} = R_2 I_2 - R_4 I_4 = 4 \times 1,48 -$$

$$- 3 \times 1,72 = 5,92 - 5,16 = 0,76 \text{ V.}$$

Intensitatea curentului I_6 este

$$I_6 = \frac{U_{CD}}{R_6} = \frac{0,76}{3} = 0,253 \text{ A.}$$

Căderea de tensiune dintre punctele BC și DB ale schemei din figura E 3.56, a sînt respectiv

$$U_{CB} = U - U_{AE} - U_{AC} = U - R_1 I - R_2 I_2 = 24 -$$

$$- 4 \times 3,2 - 4 \times 1,48 = 5,18 \text{ V}$$

$$U_{DB} = U - U_{AE} - U_{AD} = U - R_1 I - R_4 I_4 = 24 -$$

$$- 4 \times 3,2 - 3 \times 1,72 = 7,04 \text{ V}$$

iar intensitățile curenților prin laturile respective sînt

$$I_3 = \frac{U_{CB}}{R_3} = \frac{5,18}{3} = 1,72 \text{ A}$$

$$I_5 = I - I_3 = 3,2 - 1,72 = 1,48 \text{ A.}$$

3.15. Metoda superpoziției

3.15.1. *Principiul metodei; domeniu de aplicabilitate.* Metoda se poate folosi cu precădere la rețelele cu laturile legate în paralel, laturi care conțin surse sau rezistoare. Se recomandă folosirea acestei metode la rețelele simple cu cel mult două surse de curent.

În aceste cazuri intensitatea curentului dintr-o latură a rețelei este egală cu suma algebrică a curenților care s-ar stabili prin această latură dacă fiecare sursă ar exista singură în rețea (celelalte surse fiind înlocuite cu rezistoare de rezistențe egale cu rezistențele interioare ale acestora).

3.15.2. *Noțiuni de bază; definiții; notații; relații.* La aplicarea metodei se folosesc aceleași mărimi, notații și relații de la metoda transfigurării.

3.15.3. *Ecuațiile metodei.* Nu există ecuații specifice acestei metode.

3.15.4. *Programul metodei.* Pentru calculul unei rețele cu ajutorul acestei metode se procedează în modul următor:

- din enunțul problemei se alcătuieste (în cazul în care nu se dă) schema rețelei de calculat;
- se anulează tensiunile electromotoare ale tuturor surselor rețelei cu excepția celor cuprinse într-o singură latură, păstrându-se rezistențele interioare ale acestora;
- pentru rețeaua cu o singură sursă se calculează curenții din laturi;
- se repetă această operație considerînd în rețea pe rînd numai sursele situate într-o singură latură;
- curentul din fiecare latură rezultă ca fiind suma algebrică a curenților din latura respectivă astfel calculați.

Programul alcătuit pe baza acestei metode este prezentat schematic în fig. 3.36.

3.15.5. *Indicații și precizări.* Nu există indicații speciale la aplicarea acestei metode.

3.15.6. *Exemple de aplicare a metodei*

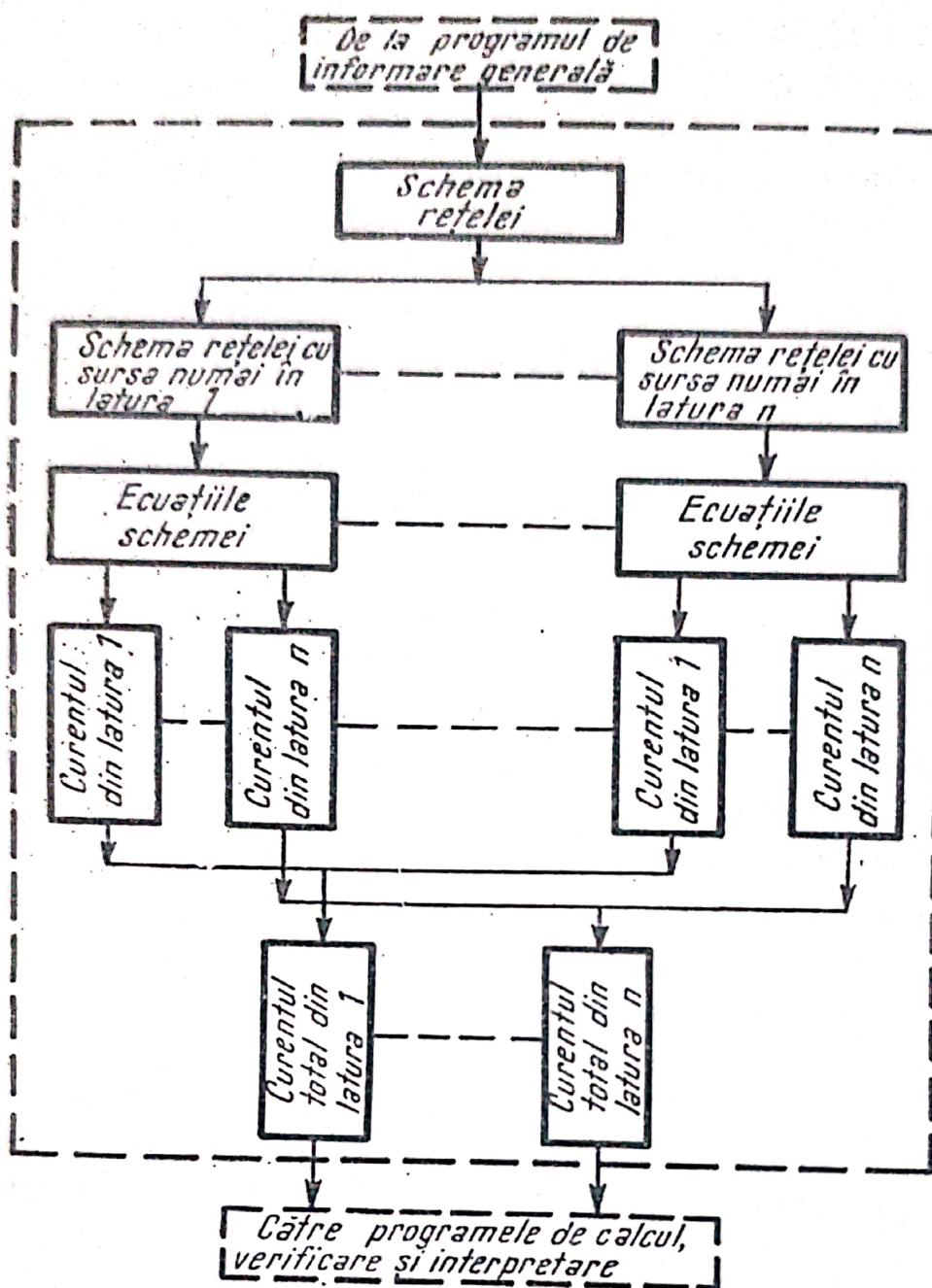
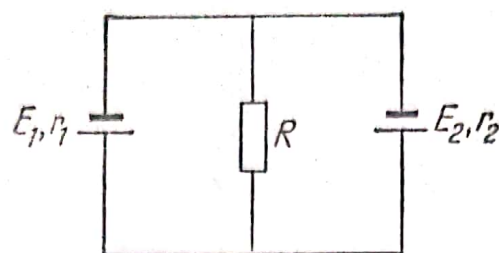


Fig. 3.36

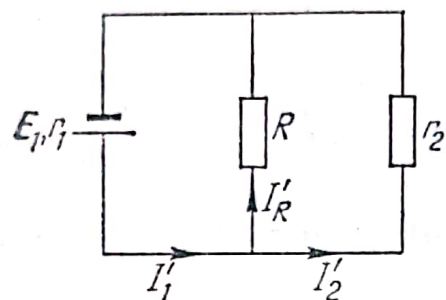
E 3.57. Se cere să se calculeze curenții din laturile rețelei din figura E 3.57, a în care avem: $E_1 = 130 \text{ V}$, $E_2 = 117 \text{ V}$, $R = 24 \Omega$, $r_1 = 1 \Omega$, $r_2 = 0,6 \Omega$.

Rezolvare. a) Se consideră în prima etapă $E_2 = 0$, pentru care rețeaua dată devine cea din figura E 3.57, b. Rezistența echivalentă a circuitului exterior este [v.(3.47)]

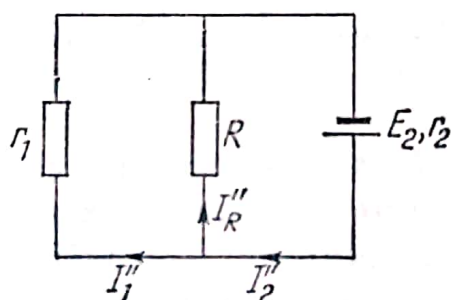
$$R'_e = \frac{Rr_2}{R + r_2} = \frac{24 \times 0,6}{24 + 0,6} = 0,585 \Omega.$$



a)



b)



c)

Fig. E 3.57

Intensitățile curenților prin laturile circuitului sînt

$$I'_1 = \frac{E_1}{R'_e + r_1} = \frac{130}{0,585 + 1} = 82 \text{ A}$$

$$I'_R = \frac{r_2}{R + r_2} I'_1 = \frac{0,6}{24,6} 82 = 2 \text{ A}$$

$$I'_2 = \frac{R}{R + r_2} I'_1 = \frac{24}{24,6} \cdot 82 = 80 \text{ A.}$$

b) Se consideră în etapa următoare $E_1 = 0$; mărimile analoge calculate ca mai înainte sînt (fig. E 3.57, c)

$$R_e'' = \frac{Rr_1}{R + r_1} = \frac{24 \times 1}{24 + 1} = 0,96 \, \Omega$$

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_e'' + r_2} = \frac{117}{0,96 + 0,6} = 75 \, \text{A}$$

$$I_R'' = \frac{r_1}{R + r_1} I_2'' = \frac{1}{24 + 1} 75 = 3 \, \text{A}$$

$$I_1'' = \frac{R}{R + r_1} I_2'' = \frac{24}{24 + 1} \cdot 75 = 72 \, \text{A}.$$

Curenții totali (reali) din laturile rețelei au valorile

$$I_R = I_R' + I_R'' = 2 + 3 = 5 \, \text{A}$$

$$I_1 = I_1' - I_1'' = 82 - 72 = 10 \, \text{A} \text{ (același sens cu } I_1')$$

$$I_2 = I_2' - I_2'' = 80 - 75 = 5 \, \text{A} \text{ (același sens cu } I_2').$$

3.16. Metoda teoremelor lui Kirchhoff

3.16.1. *Principiul metodei; domeniu de aplicabilitate.*
Teoremele lui Kirchhoff se bazează pe legea conservării sarcinii electrice (prima teoremă) și pe legea lui Ohm și teorema potențialului electric (a doua teoremă). Ele sînt teoreme generale, aplicabile la calculul rețelelor electrice filiforme în curent continuu și curent alternativ, la calculul circuitelor cu condensatoare și prin analogie la calculul circuitelor magnetice.

3.16.2. *Noțiuni de bază; definiții; notații; relații.*

a) *Teoremele lui Kirchhoff pentru curentul continuu de conducție.*

Prima teoremă: suma algebrică a intensităților curenților din laturile legate într-un nod al unei rețele este nulă

$$\sum I_k = 0 \quad (3.54)$$

(unde I_k este intensitatea curentului din latura k , considerată cu semnul plus, dacă sensul curentului este orientat dinspre nod și cu semnul minus, dacă sensul curentului este orientat spre nod).

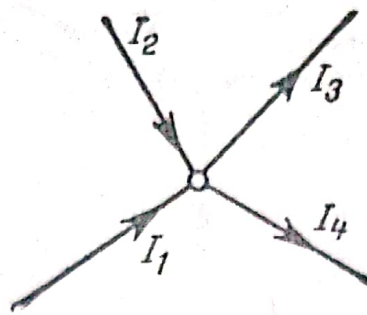


Fig. 3.37

Exemplu (fig. 3.37):

$$I_3 + I_4 - I_1 - I_2 = 0$$

A doua teoremă: suma algebrică a tensiunilor electromotoare imprimare (ale generatoarelor) dintr-un ochi al unei rețele este egală cu suma căderilor de tensiune din laturile ochiului

$$\sum E_k = \sum R_k I_k. \quad (3.55)$$

Termenii sumelor din relația (3.55) sînt mărimi algebrice: căderea de tensiune într-o latură se consideră pozitivă dacă sensul de parcurgere al acestei laturi coincide cu cel ales pentru curentul respectiv. Aceeași regulă se păstrează și pentru tensiunea electromotoare.

Exemplu (fig. 3.38):

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4 = E_1 - E_2.$$

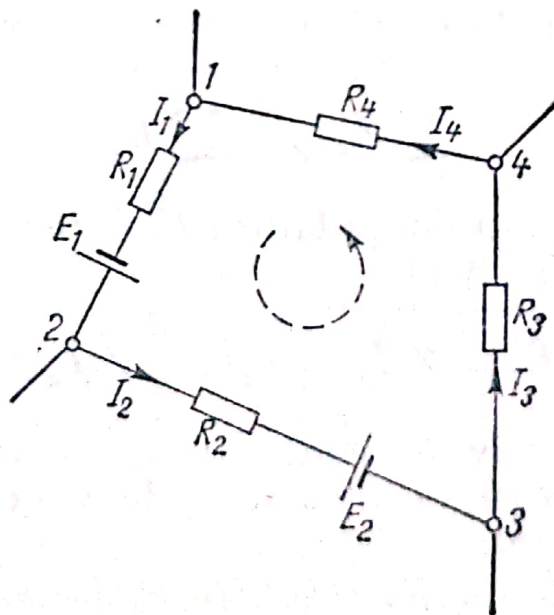


Fig. 3.38

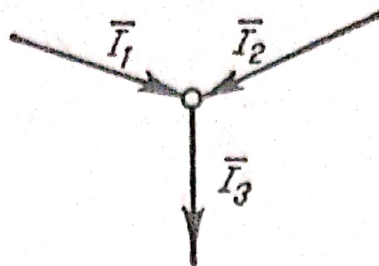


Fig. 3.39

b) *Teoremele lui Kirchhoff pentru curentul alternativ.* Teoremele lui Kirchhoff pentru curentul continuu de conducție își păstrează forma și pentru curenții și tensiunile alternative sinusoidale.

Prima teoremă: într-un nod al unei rețele de curent alternativ suma curenților în complex care intră și ies din nod este nulă

$$\sum \bar{I}_k = 0. \quad (3.56)$$

Exemplu (fig. 3.39):

$$-\bar{I}_1 - \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0.$$

A doua teoremă: suma căderilor de tensiune complexe în lungul laturilor ochiului este egală cu suma în complex a tensiunilor electromotoare ale surselor de curent alternativ din ochiul considerat

$$\sum \bar{Z}_k \bar{I}_k = \sum \bar{E}_k \quad (3.57)$$

unde $\bar{Z}_k$ este impedanța laturii K a circuitului.

Exemplu (fig. 3.40):

$$\bar{E}_1 = \bar{Z}_1 \bar{I}_1 + \bar{Z}_2 \bar{I}_2 + \bar{Z}_3 \bar{I}_3.$$

În ceea ce privește convenția de semne, aceasta se păstrează aceeași, pentru ambele teoreme, ca și în curent continuu.

c) *Teoremele lui Kirchhoff în electrostatică (rețele cu condensatoare).*

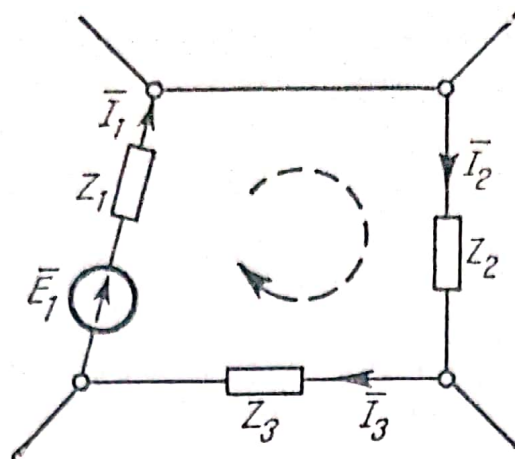


Fig. 3.40

Prima teoremă: în jurul unui nod al unei rețele cu condensatoare sarcina electrică totală apărută prin influență este nulă

$$\sum Q_k = \sum C_k U_k = 0 \quad (3.58)$$

unde Q_k este sarcina electrică, iar C_k și U_k este capacitatea, respectiv căderea de tensiune a condensatoarelor ale căror armături se întâlnesc în nodul k .

Exemplu (fig. 3.41):

$$-C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3 = 0.$$

A doua teoremă: suma algebrică a potențialelor dintre armăturile condensatoarelor dintr-un ochi al unei rețele

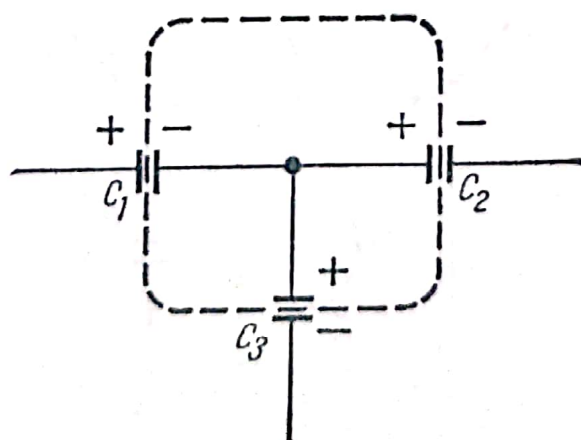


Fig. 3.41

cu condensatoare este egală cu suma tensiunilor electromotoare exterioare

$$\sum \frac{Q_h}{C_h} = \sum E_h. \quad (3.59)$$

În relația (3.59) potențialele condensatoarelor se consideră pozitive dacă sensul de parcurs ales este de la armătura negativă la cea pozitivă, iar pentru tensiunea electromotoare dacă coincide cu cel al curentului din (baterie) generator.

Exemplu (fig. 3.42):

$$U_1 + U_2 = E_1.$$

d) *Teoremele lui Kirchhoff pentru circuitele magnetice.*

Prima teoremă: suma algebrică a fluxurilor magnetice care trec prin laturile unui circuit magnetic care concură într-un nod este nulă

$$\sum \Phi_h = 0 \quad (3.60)$$

unde Φ_h este fluxul pentru latura h ; el se consideră cu semnul plus dacă are sensul orientat dinspre nod și semnul minus în caz contrar.

Exemplu (fig. 3.43):

$$\Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 - \Phi_1 = 0.$$

A doua teoremă: suma algebrică a căderilor de tensiune magnetică corespunzătoare laturilor unui ochi și unui circuit magnetic este egală cu suma algebrică a

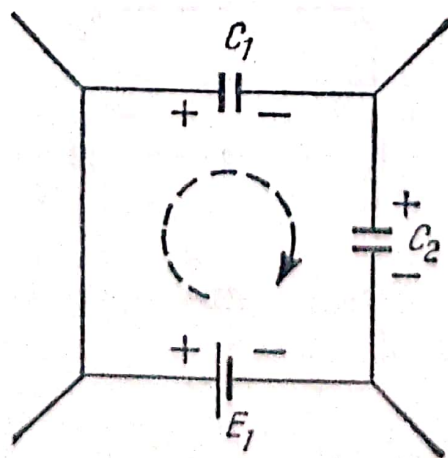


Fig. 3.42

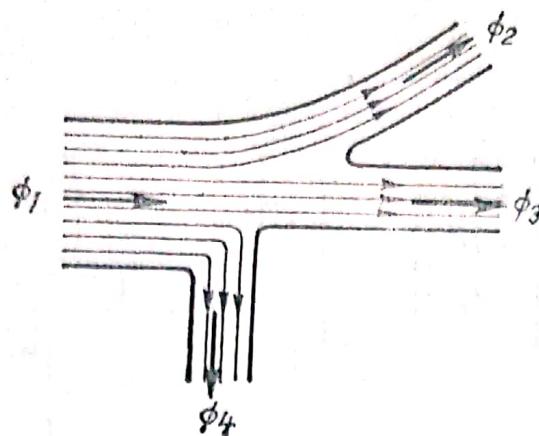


Fig. 3.43

tensiunilor magnetice produse de circuitele care înlănțuie laturile ochiului

$$\sum R_{mk} \Phi_k = \sum (NI)_k \quad (3.61)$$

unde R_{mk} este reluctanța din latura k a ochiului, Φ_k fluxul pentru o spiră corespunzător laturii k , iar (NI) tensiunea magnetomotoare a bobinei care înconjoară latura k .

Dacă sensul curentului într-o bobină produce un flux al cărui sens corespunde cu cel de parcurs ales, tensiunea magnetomotoare se consideră pozitivă, invers negativă. Aceeași regulă se păstrează și pentru fluxuri.

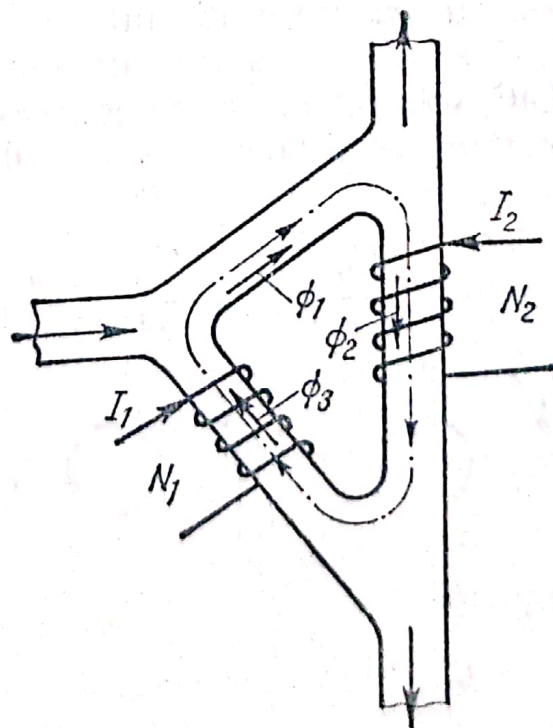


Fig. 3.44

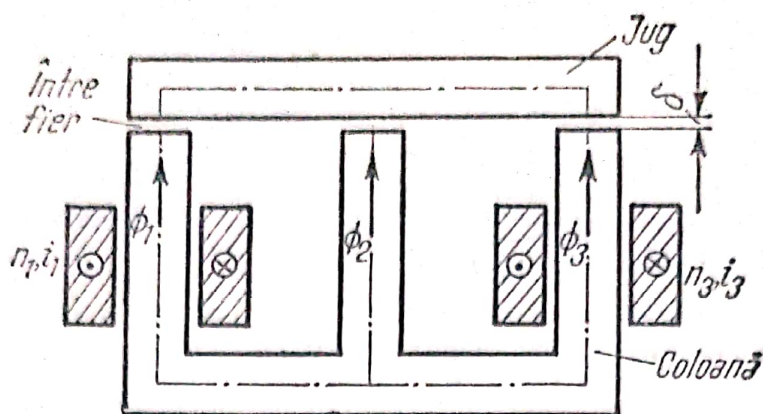


Fig. 3.45

Exemplu (fig. 3.44):

$$R_{m1}\Phi_1 + R_{m2}\Phi_2 + R_{m3}\Phi_3 = N_2I_2 + N_1I_1.$$

Schema electrică echivalentă a unui circuit magnetic. Pentru aplicarea cu ușurință a teoremelor lui Kirchhoff la circuitele magnetice se folosesc scheme electrice echivalente. Aceste scheme se realizează ținându-se seama de analogia ce există între mărimile flux magnetic (Φ), forță magnetomotoare (F_M) și rezistență magnetică (R_M) ce intră în alcătuirea unui circuit magnetic și respectiv intensitate a curentului electric (I), tensiune electromotoare (E) și rezistență electrică (R) ce intră în alcătuirea unui circuit electric.

În figura 3.45 este reprezentat un circuit magnetic, iar în figura 3.46, schema electrică echivalentă acestuia. În schema electrică echivalentă s-au folosit următoarele notații:

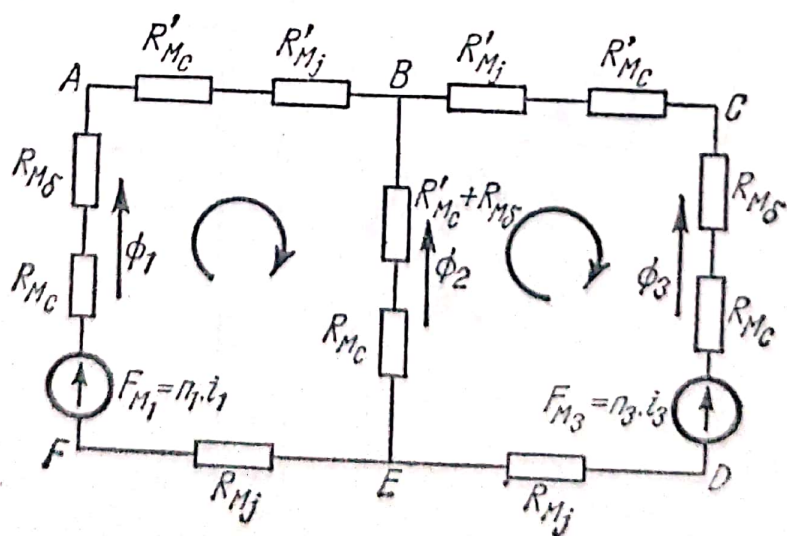


Fig. 3.46

R_{MC} — rezistență magnetică a coloanei,
 R_{MJ} — rezistență magnetică a unei porțiuni de jug,
 R'_{MC} — rezistență magnetică a unei porțiuni de coloană,
 $R_{M\delta}$ — rezistență magnetică a întrefierului,
 F_M — tensiunea magnetomotoare,
 Φ — fluxul corespunzător unei laturi de circuit,
 n — numărul de spire al bobinei,
 i — intensitatea curentului ce străbate spirele bobinei

Aplicînd teoremele lui Kirchhoff pe această schemă electrică echivalentă, respectiv relațiile (3.60), (3.61), se obțin ecuațiile:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \quad (\text{nodul } B)$$

$$(R_{MC} + R_{M\delta} + R'_{MC} + 2R'_{MJ})\Phi_1 - (R'_{MC} + R_{M\delta} + R_{MC})\Phi_2 = n_1 i_1 \quad (\text{ochiul } ABEF)$$

$$(R'_{MC} + R_{M\delta} + R_{MC})\Phi_2 - (2R'_{MJ} + R'_{MC} + R_{M\delta} + R_{MC})\Phi_3 = -n_3 i_3 \quad (\text{ochiul } BCDE).$$

3.16.3. Ecuațiile metodei. La această metodă se folosesc drept ecuații relațiile prezentate la punctul precedent.

3.16.4. Programul metodei. Pentru aplicarea teoremelor lui Kirchhoff se procedează în modul următor:

Se stabilește numărul z de laturi și numărul n de noduri ale rețelei, ținînd seama că nod este punctul de întîlnire a cel puțin trei laturi, iar latură este porțiunea de circuit cuprinsă între două noduri.

Se alege arbitrar sensurile necunoscute ale curenților (fluxurilor magnetice, cîmpurilor electrostatice dintre armăturile condensatorilor) din laturi notîndu-se fiecare sens cu cîte o săgeată.

Se aplică prima teoremă a lui Kirchhoff în $n - 1$ noduri, obținîndu-se $n - 1$ relații între necunoscute.

Se identifică ochiurile rețelei.

Se alege un sens arbitrar de parcurgere pentru fiecare ochi, marcînd aceasta în interiorul fiecărui ochi cu o săgeată curbilinie.

Se aplică a doua teoremă a lui Kirchhoff în $z - n + 1$ ochiuri, obținându-se tot atâtea relații între necunoscute.

La scrierea acestor relații se va ține seama de următoarele convenții de semne.

Produsul $RI(\Phi, I, U)$ este pozitiv dacă sensul de parcurgere al ochiului este cel ales pentru curent (flux magnetic, intensitatea cîmpului), iar sursele au t.c.m. (t.m.m.) pozitivă dacă sensul curentului (fluxului) acestora coincide cu sensul de parcurs al ochiului.

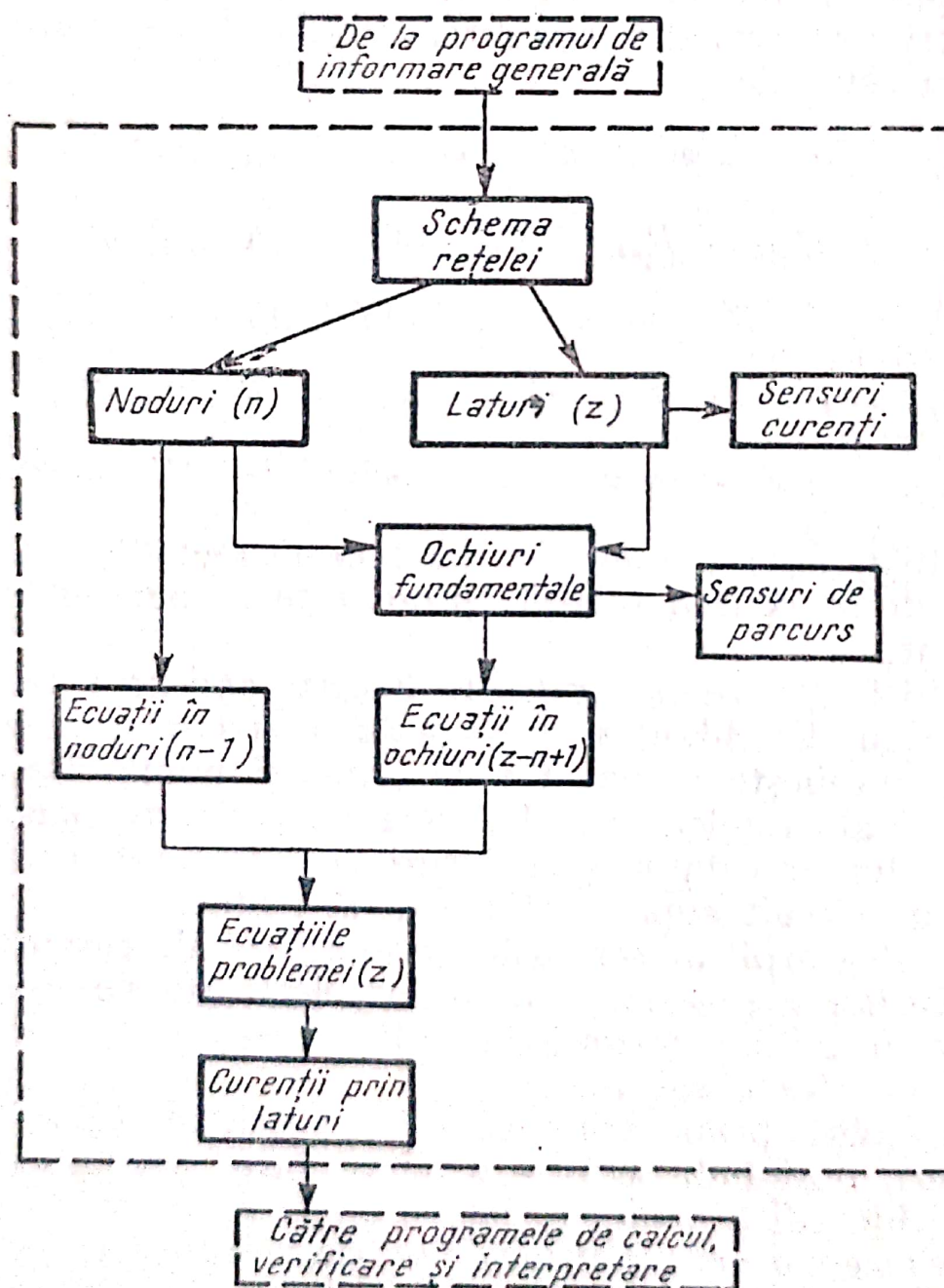


Fig. 3.47

Se rezolvă sistemul de z ecuații și se obțin valorile curenților (fluxurilor, tensiunilor la bornele condensatoarelor).

Curenții (fluxurile, tensiunile la borne) ce rezultă cu semnul plus au ca sens de circulație sensul arbitrar ales, cei ce rezultă cu semnul minus au ca sens real de circulație sensul invers celui arbitrar ales.

Programul de rezolvare al unei probleme cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff este prezentat în fig. 3.47.

3.16.5. *Indicații și precizări.* Nu există indicații speciale la aplicarea acestei metode.

3.16.6. *Exemple de aplicare a metodei*

E 3.58. Să se calculeze curenții din laturile rețelei electrice din figura E 3.58, a dacă se cunosc: $E_1 = 40 \text{ V}$, $E_2 = 20 \text{ V}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 1 \Omega$, $R_4 = 8 \Omega$, $R_5 = 4 \Omega$, $R_6 = 6 \Omega$.

Rezolvare. Rețeaua are patru noduri ($n = 4$) notate cu A , B , C , D , șase laturi ($z = 6$) și trei ochiuri ($o = z - n + 1$) notate cu I , II și III .

Se aleg pentru curenții din cele șase laturi și pentru parcurgerea ochiurilor, sensurile arbitrare din figura E 3.58, b.

Aplicînd prima teoremă a lui Kirchhoff (3.54) în nodurile A , B și C și cea de a doua teoremă (3.55) în

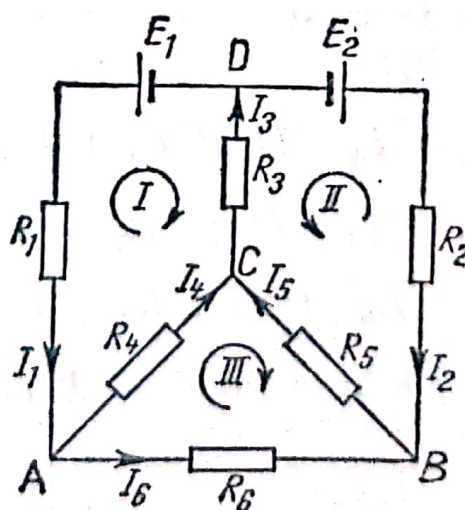


Fig. E 3.58

ochiurile I , II și III se obține următorul sistem de ecuații:

$$\begin{array}{ll} (A) & I_4 + I_6 = I_1 \\ (B) & I_2 + I_6 = I_5 \\ (C) & I_4 + I_5 = I_3 \end{array} \quad \begin{array}{ll} (I) & I_1 R_1 + I_4 R_4 + I_3 R_3 = E_1 \\ (II) & I_2 R_2 + I_5 R_5 + I_3 R_3 = E_2 \\ (III) & I_6 R_6 + I_5 R_5 - I_4 R_4 = 0. \end{array}$$

Introducând valorile numerice se obține

$$\begin{array}{ll} I_4 + I_6 - I_1 = 0 & 2I_1 + 8I_4 + I_3 = 40 \\ I_2 + I_6 - I_5 = 0 & 2I_2 + 4I_5 + I_3 = 20 \\ I_4 + I_5 - I_3 = 0 & 6I_6 + 4I_5 - 8I_4 = 0. \end{array}$$

Rezolvarea sistemului duce la următoarele valori pentru necunoscute

$$I_1 = 5A, I_2 = 1A, I_3 = 6A, I_4 = I_5 = 3A, I_6 = 2A.$$

În 3.59. La rețeaua din figura E 3.59, a se cunosc:

$$E_1 = 130V, E_2 = 140V, E_3 = 215V, R_1 = 2\Omega,$$

$$R_2 = 4\Omega, R_3 = 1\Omega, R_4 = R_6 = 10\Omega, R_5 = 20\Omega.$$

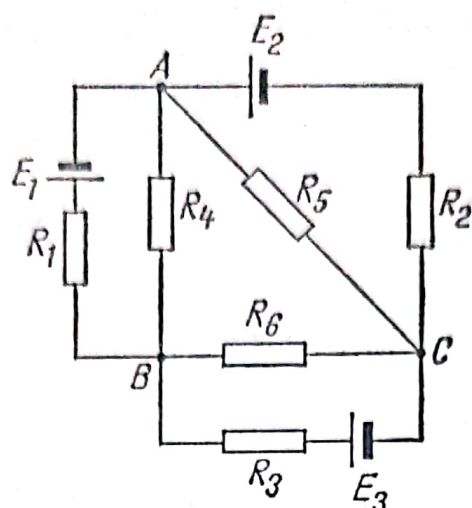
Se cere să se calculeze curenții din fiecare ramură.

Se aleg sensurile curenților și sensul de parcurgere a ochiurilor ca în figură și se aplică teoremele lui Kirchhoff (fig. E 3.59, b):

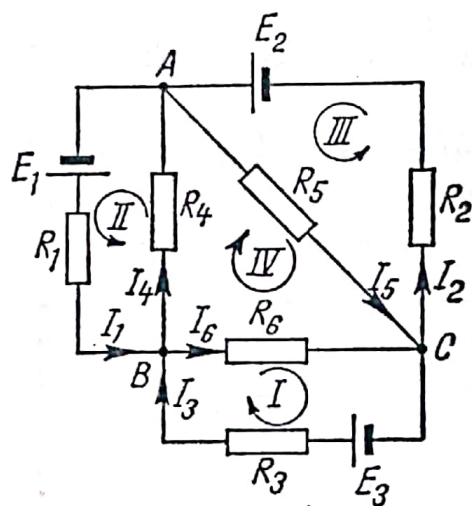
$$\begin{array}{ll} (C) & I_3 + I_2 = I_5 + I_6 \\ (B) & I_4 + I_6 = I_1 + I_3 \\ (I) & I_3 R_3 + I_6 R_6 = E_3 \end{array} \quad \begin{array}{ll} (II) & I_1 R_1 + I_4 R_4 = E_1 \\ (III) & I_2 R_2 + I_5 R_5 = E_2 \\ (IV) & I_4 R_4 + I_5 R_5 - I_6 R_6 = 0. \end{array}$$

Introducând datele problemei în ultimele patru ecuații, acestea devin

$$\begin{array}{ll} I_3 + 10I_6 = 215 & 4I_2 + 20I_5 = 140 \\ 2I_1 + 10I_4 = 130 & 10I_4 + 20I_5 = 10I_6. \end{array}$$



a)



b)

Fig. E 3.59

Rezolvând sistemul se obține

$$I_1 = I_3 = 15 \text{ A}, \quad I_2 = I_4 = 10 \text{ A},$$

$$I_5 = 5 \text{ A}, \quad I_6 = 20 \text{ A}.$$

E 3.60. În schema reprezentată în figura E 3.60, a condensatoarelor au capacitățile C_1 , C_2 și C_3 , iar sursele au t.e.m. E_1 și E_2 . Să se determine tensiunea la bornele fiecărui condensator.

(Olimpiadă U.R.S.S.)

Rezolvare. Se alege modul în care se încarcă fiecare dintre cele trei condensatoare. Pentru C_1 și

C_2 modul de încărcare este sigur, pentru C_3 se alege însă un mod arbitrar. Se obțin astfel încărcările din figura E 3.60, b. Se scrie prima teoremă a lui Kirchhoff (3.58) în nodul A

$$(A) -Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

care se poate pune sub forma

$$-C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3 = 0. \quad (1)$$

Se scrie cea de a doua teoremă a lui Kirchhoff (3.59) pentru ochiurile I și II . Se obține

$$(I) U_1 + U_3 - E_1 = 0 \quad (2)$$

$$(II) U_2 - U_3 - E_2 = 0 \quad (3)$$

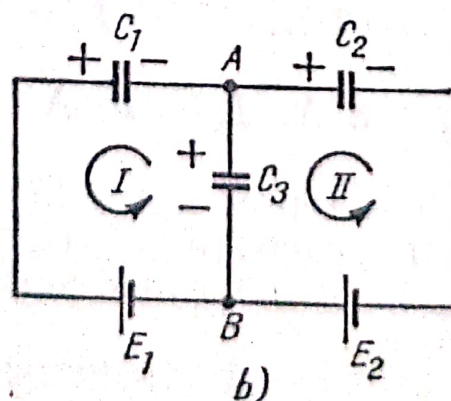
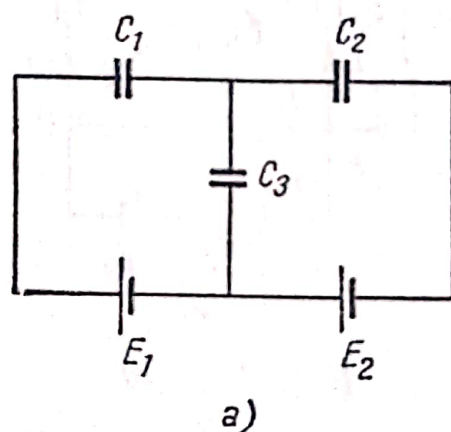


Fig. E 3.60

Rezolvând sistemul de ecuații (1), (2) și (3) cu trei necunoscute U_1 , U_2 și U_3 rezultă

$$U_1 = \frac{C_3 E_1 + C_2 (E_1 + E_2)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$U_2 = \frac{C_3 E_2 + C_1 (E_1 + E_2)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$U_3 = \frac{C_1 E_1 - C_2 E_2}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Pentru ca modul de încărcare al condensatorului C_3 să fie cel ales este necesar ca

$$C_1 E_1 > C_2 E_2.$$

E 3.61. Circuitul magnetic din figura E 3.61, a (dimensiunile în mm) are o permeabilitate magnetică $\mu = 600 \mu_0$.

Intensitatea curentului și numărul de spire al celor două bobine avînd respectiv valorile $i_1 = 6$ A, $n_1 = 200$ spire și $i_2 = 9$ A, $n_2 = 220$ spire, să se determine:

- a) schema echivalentă a circuitului;
- b) fluxul magnetic total al fiecărei bobine.

Rezolvare. a) Se desenează schema electrică echivalentă cu circuitul magnetic dat, calculîndu-se valorile elementelor active și pasive ale acesteia (fig. E 3.61 b)

$$R_{m_1} = \frac{2 \times 0,105 + 0,24}{600 \mu_0 \times 30 \times 10^{-4}} = \frac{1}{4 \mu_0}$$

$$R_{m_2} = \frac{2 \times 0,105 + 0,24}{600 \mu_0 \times 30 \times 10^{-4}} = \frac{1}{4 \mu_0}$$

$$R_{m_3} = \frac{0,24 - 0,002}{600 \mu_0 \times 36 \times 10^{-4}} = \frac{0,111}{\mu_0}$$

$$R_{m_\delta} = \frac{0,002}{\mu_0 36 \times 10^{-4}} = \frac{0,556}{\mu_0}$$

$$n_1 i_1 = 6 \times 200 = 1200 \text{ A}$$

$$n_2 i_2 = 9 \times 220 = 1980 \text{ A}$$

$$R_{m_3} + R_{m_\delta} = \frac{0,111 + 0,556}{\mu_0} = \frac{2}{3 \mu_0}.$$

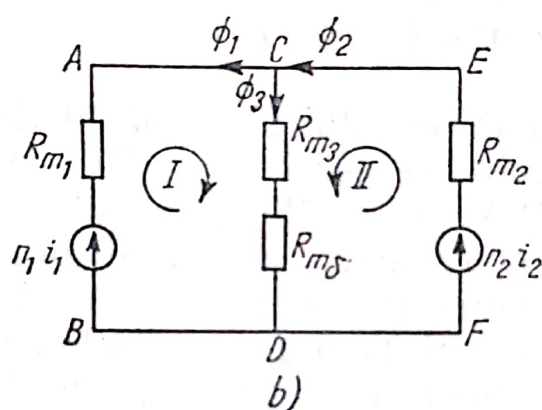
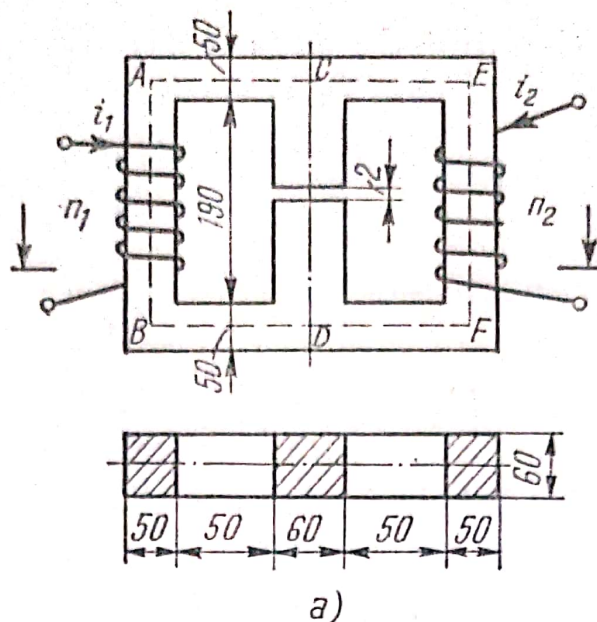


Fig. E 3.61

Se aplică teoremele lui Kirchhoff circuitului electric echivalent (fig. E 3.61 b).

$$(C) \quad \Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3$$

$$(I) \quad \frac{2}{3} \Phi_3 - \frac{1}{4} \Phi_1 = 1200 \mu_0$$

$$(II) \quad \frac{2}{3} \Phi_3 + \frac{1}{4} \Phi_2 = 1980 \mu_0.$$

Din rezolvarea sistemului se obține

$$\Phi_1 = 557 \mu_0 = 0,0007 \text{ Wb}$$

$$\Phi_2 = 2563 \mu_0 = 0,00322 \text{ Wb}$$

$$\Phi_3 = 2006 \mu_0 = 0,00252 \text{ Wb.}$$

Fluxul magnetic total al fiecărei bobine este

$$\psi_1 = n_1 \Phi_1 = 200 \cdot 0,0007 = 0,140 \text{ Wb}$$

$$\psi_2 = n_2 \Phi_2 = 220 \cdot 0,00322 = 0,7084 \text{ Wb.}$$

3.17. Metoda teoremelor lui Kirchhoff aplicată la calculul rezistenței sau capacității echivalente

3.17.1. Principiul metodei; domeniu de aplicabilitate.

Această metodă se folosește pentru calculul rezistenței sau capacității echivalente la circuitele alcătuite numai din rezistoare sau numai din condensatoare pentru cazurile în care acest lucru nu este posibil sau mai dificil pe altă cale.

Metoda constă din aplicarea la capetele rețelei a unei diferențe de potențial fictive, al cărui rol este acela de a ajuta calculul. În aceste condiții, aplicând rețelei teoremele lui Kirchhoff, se determină curenții din fiecare latură funcție de intensitate I a curentului ce intră și iese din rețea, respectiv sarcina electrică a fiecărui condensator funcție de sarcina Q a condensatorului echivalent. Valoarea rezistenței echivalente R , respectiv a capacității echivalente C , se obține din egalarea diferenței de potențial la bornele circuitului $\left(RI, \frac{Q}{C}\right)$ cu cea rezultată din adunarea căderilor de tensiune din laturile ce alcătuiesc drumul ales arbitrar dintre capetele rețelei.

3.17.2. Noțiuni de bază; definiții; notații; relații.

În ecuațiile acestei metode se folosesc aceleași mărimi, notații și relații întâlnite în metodele prezentate mai înainte.

3.17.3. *Ecuatiile metodei.* Se folosesc aceleași ecuații ca la metoda precedentă.

3.17.4. *Programul metodei.* Etapele pentru rezolvarea unei probleme cu ajutorul acestei metode sînt următoarele:

— se calculează curenții respectiv sarcinile electrice ale condensatoarelor din laturi cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff funcție de curentul fictiv I ce intră și iese din rețea, respectiv de sarcina electrică Q a conden-

satorului echivalent produse de o sursă fictivă ce realizează o cădere de tensiune V la bornele rețelei;

— se aleg laturile ce alcătuiesc un drum între capetele rețelei;

— se calculează căderile de tensiune între capetele circuitului însumând căderile de tensiune din laturile ce alcătuiesc drumul ales dintre aceste capete;

— se egalează această sumă cu produsul dintre rezistența echivalentă R și intensitatea I a curentului fictiv ce intră și iese din rețea, respectiv cu raportul dintre

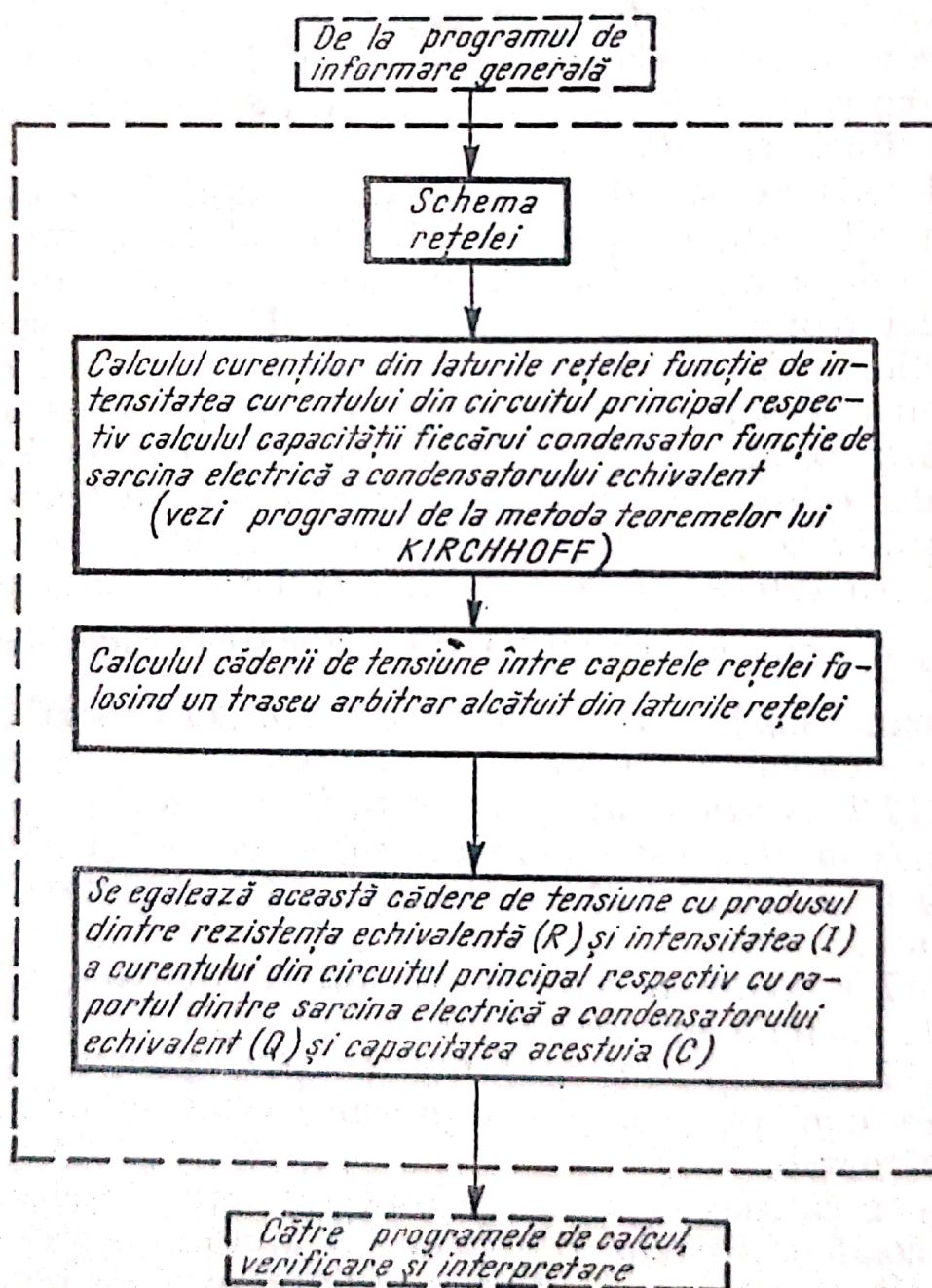


Fig. 3.48

sarcina electrică a condensatorului echivalent Q și capacitatea condensatorului echivalent C .

Programul corespunzător acestei metode este prezentat în figura 3.48.

3.17.5. *Indicații și precizări.* Nu există indicații speciale la aplicarea acestei metode.

3.17.6. *Exemple de aplicare a metodei*

E 3.62. Se cere să se calculeze rezistența echivalentă între punctele A și B ale circuitului din figura 3.62, a în care rezistențele r au valori egale.

Rezolvare. Se calculează curenții din laturile circuitului aplicând teoremele lui Kirchhoff.

Se aleg curenții și sensul lor din rețea ținând seama de dubla simetrie a circuitului (fig. E 3.62, b).

Ecuațiile ce rezultă din aplicarea teoremelor lui Kirchhoff, pentru sensurile alese pentru curenți și de parcurs al ochiurilor din figură, sînt următoarele:

$$\begin{array}{ll} (A) & I = 2i_1 \\ (E) & 2i_2 = i_4 \\ (C) & i_1 = i_2 + i_3 \\ (I) & i_4 + 2i_2 - i_3 = 0. \end{array}$$

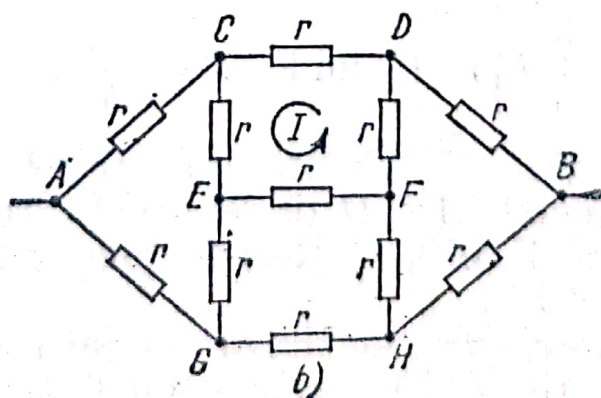
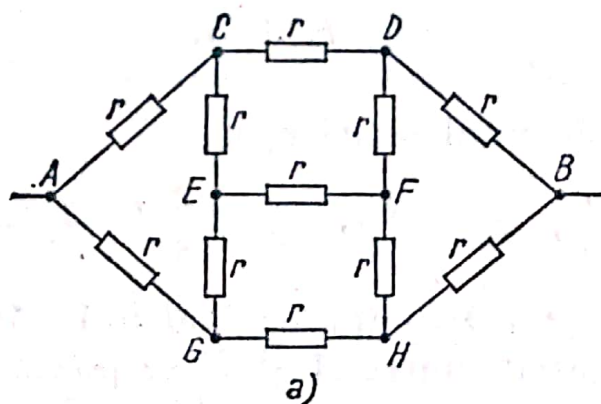
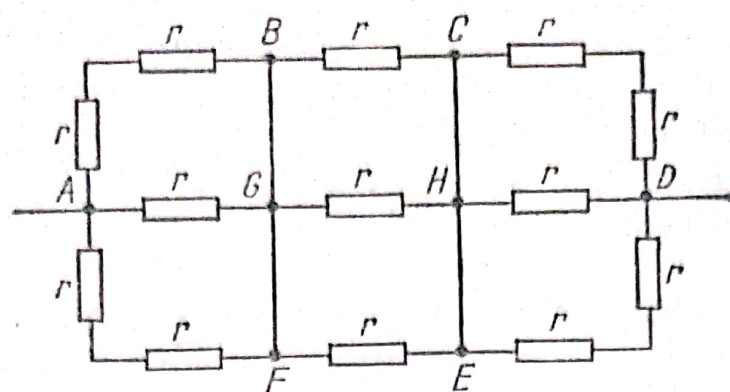
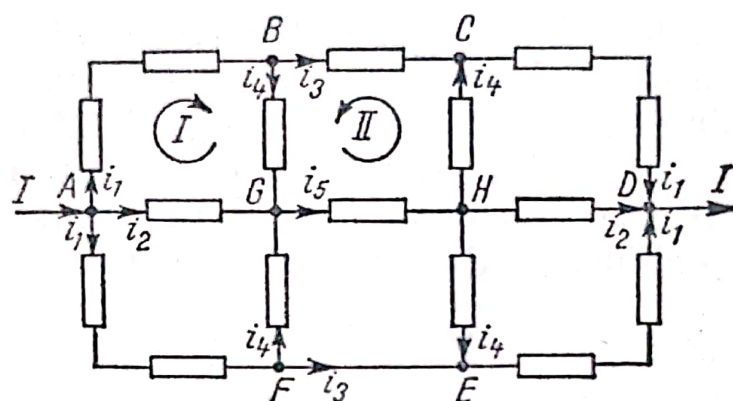


Fig. E 3.62



a)



b)

Fig. E 3.63.

Rezolvînd sistemul se găsește

$$i_1 = \frac{I}{2}, \quad i_2 = \frac{I}{10}, \quad i_3 = \frac{2}{5} I, \quad i_4 = \frac{I}{5}.$$

Notînd cu R rezistența echivalentă căutată, diferența de potențial dintre A și B se poate scrie

$$RI = r(i_1 + i_3 + i_1)$$

$$RI = \left(I + \frac{2}{5} I \right), \text{ de unde } R = \frac{7}{5} r.$$

E 3.63. Se cere să se determine rezistența echivalentă între punctele A și D ale rețelei electrice reprezentată în figura E 3.63, a. Rezistențele din rețea sînt identice. [15, 4/72].

Rezolvare. Se calculează curenții din laturile circuitului cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff funcție de curențul fictiv I ce intră și iese din rețea produs de o sursă fictivă.

Sensurile curenților în laturile rețelei și sensul de parcurs al ochiurilor au fost alese ca în figura E 3.63, b.

Ecuatiile ce rezultă din aplicarea teoremelor lui Kirchhoff sînt:

$$(A) \quad 2i_1 + i_2 = I \quad (1)$$

$$(B) \quad i_1 = i_3 + i_4 \quad (2)$$

$$(G) \quad i_2 + 2i_4 - i_5 = 0 \quad (3)$$

$$(I) \quad 2i_1 + i_4 - i_2 = 0 \quad (4)$$

$$(II) \quad 2i_4 - i_3 + i_5 = 0. \quad (5)$$

Rezolvarea acestui sistem se face în modul următor. Din (4) rezultă

$$i_4 = i_2 - 2i_1 \quad (6)$$

care introdus în (2) și (5) conduce la

$$i_3 = i_1 - i_4 = 3i_1 - i_2 \quad (7)$$

$$i_5 = i_3 - 2i_4 = 7i_1 - 3i_2. \quad (8)$$

Introducînd (6), (7) și (8) în (2) se obține

$$6i_2 - 11i_1 = 0 \quad (9)$$

care, împreună cu (1) conduce la

$$i_1 = \frac{6}{23} I, \quad i_2 = \frac{11}{23} I.$$

Din (6), (7) și (8) rezultă

$$i_3 = \frac{7}{23} I, \quad i_4 = -\frac{1}{23} I, \quad i_5 = \frac{9}{23} I.$$

Rezistența echivalentă se calculează scriind diferența de potențial între A și B

$$RI = 2ri_1 + ri_3 + 2ri_1$$

sau, înlocuind expresiile găsite pentru i_1 și i_3 funcție de I , se obține

$$RI = rI \left[\frac{24}{23} + \frac{7}{23} \right]$$

de unde

$$R = \frac{31}{23} r.$$

E 3.64. Se cere să se calculeze rezistența echivalentă a unui circuit ale cărui laturi de rezistențe egale cu r constituie laturile bazei și muchiile suprafeței laterale ale unei piramide cu baza un hexagon, dacă curentul urmează să intre printr-unul din vîrfurile bazei și să iasă prin vîrfurile opus acestuia situat pe diagonala aceleiași baze (fig. E 3.64, a).

Ce devine această rezistență dacă circuitul este simetric în raport cu baza piramidei?

Rezolvare. Se aplică metoda teoremelor lui Kirchhoff pentru calculul rezistenței echivalente a unui circuit. Se transpune circuitul în plan (fig. E 3.64, b) și se aleg sensurile curenților și ale celui de parcurs al

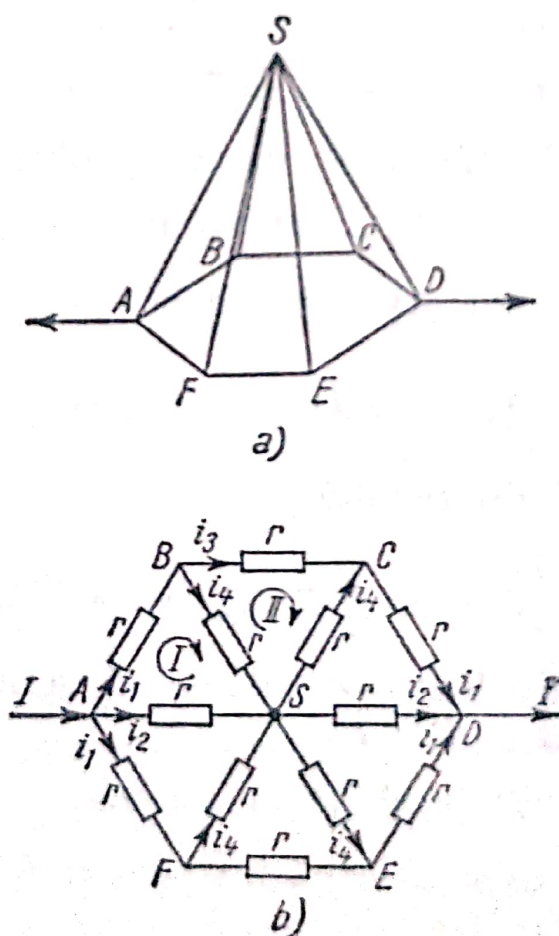


Fig. E 3.64

ochiurilor necesare calculului ca în figură; ecuațiile ce rezultă din aplicarea teoremelor lui Kirchhoff sînt:

$$(A) \quad 2i_1 + i_2 = I \quad (1)$$

$$(B) \quad i_1 = i_3 + i_4 \quad (2)$$

$$(I) \quad i_1 + i_4 - i_2 = 0 \quad (3)$$

$$(II) \quad i_3 - 2i_4 = 0. \quad (4)$$

Se rezolvă sistemul după cum urmează. Din (4) rezultă

$$i_3 = 2i_4 \quad (5)$$

iar din (2)

$$i_1 = 3i_4. \quad (6)$$

Introducînd (5) și (6) în (3) rezultă

$$\frac{4}{3} i_1 - i_2 = 0 \quad (7)$$

care, împreună cu (1), conduce la determinarea lui i_1 și i_2 respectiv

$$i_1 = \frac{3}{10} I, \quad i_2 = \frac{4}{10} I.$$

Din (6) rezultă

$$i_4 = \frac{i_1}{3} = \frac{I}{10}$$

iar din (5)

$$i_3 = \frac{2}{10} I.$$

Rezistența echivalentă este egală cu

$$R = \left(2 \frac{3}{10} + \frac{2}{10} \right) r = \frac{4}{5} r$$

În cazul în care circuitul este simetric în raport cu baza piramidei, menținînd aceleași notații și pentru

laturile simetrice, relațiile ce rezultă din scrierea teoremei lui Kirchhoff sînt

$$2i_1' + 2i_2' = I \quad i_1'' + i_4'' - i_2'' = 0$$

$$i_1' = i_3' + 2i_4' \quad i_3'' - 2i_4'' = 0.$$

Soluțiile acestui sistem de ecuații sînt

$$i_1' = \frac{2}{9} I, \quad i_2' = \frac{5}{18} I, \quad i_3' = \frac{1}{9} I, \quad i_4' = \frac{1}{18} I$$

iar rezistența echivalentă a circuitului simetric este

$$R' = \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} \right) r = \frac{5}{9} r.$$

E 3.65. Cele patru laturi ale unui pătrat $ABCD$ sînt alcătuite din 4 rezistențe r_1, r_2, r_3, r_4 . Punctele B și D , diagonal opuse, sînt legate printr-o rezistență r_5 . Folosind legile lui Kirchhoff se poate calcula rezistența totală între punctele A și C dacă se cunosc numai cele cinci rezistențe? Dar dacă $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r$?

Rezolvare. Se aplică o diferență de potențial între A și C . Această diferență de potențial v este ipotetică avînd numai rolul de a înlesni calculele. Sub această diferență de potențial în cele cinci laturi ale circuitului apar curenții din figura E 3.65.

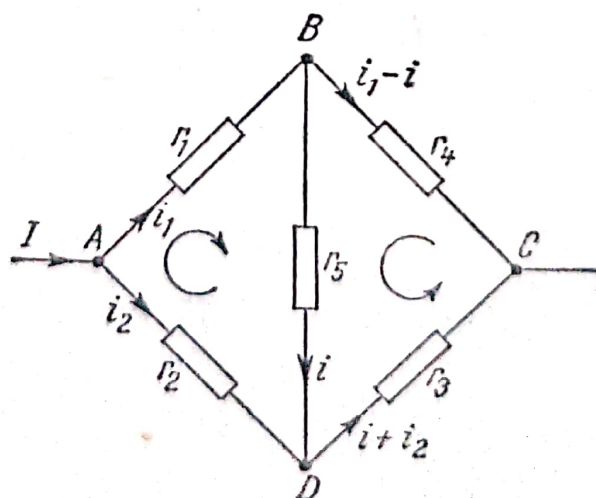


Fig. E 3.65

Aplicînd legile lui Kirchhoff circuitelor ADB , DBC și ADC ultimul închis de tensiunea v se obțin relațiile

$$r_1 i_1 + r_5 i - r_2 i_2 = 0$$

$$r_5 i + r_3(i + i_2) - r_4(i_1 - i) = 0$$

$$r_1 i_1 + r_4(i_1 - i) = v.$$

Rezolvînd cele trei ecuații cu necunoscutele i_1 , i_2 și i se obține

$$i_1 = v \frac{(r_2 + r_3)r_5 + (r_3 + r_4)r_2}{r_5(r_1 + r_4)(r_2 + r_3) + r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_2 r_3 r_4 + r_1 r_3 r_4}$$

$$i_2 = v \frac{(r_1 + r_4)r_5 + (r_3 + r_4)r_1}{r_5(r_1 + r_4)(r_2 + r_3) + r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_2 r_3 r_4 + r_1 r_3 r_4}.$$

Curentul I ce intră prin A și iese prin C are valoarea

$$\begin{aligned} I &= i_1 + i_2 = \\ &= v \frac{(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)r_5 + (r_1 + r_2)(r_3 + r_4)}{r_5(r_1 + r_4)(r_2 + r_3) + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_2 r_3 + r_2 r_3 r_4 + r_1 r_3 r_4} \end{aligned}$$

Rezistența R dintre A și C este

$$R = \frac{v}{I} = \frac{r_5(r_1 + r_4)(r_2 + r_3) + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_2 r_3 + r_2 r_3 r_4 + r_1 r_3 r_4}{(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)r_5 + (r_1 + r_2)(r_3 + r_4)}.$$

Se vede că rezistența echivalentă depinde numai de valorile rezistențelor circuitului.

Dacă $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r$ din ultima relație rezultă

$$R = r.$$

Explicația acestui rezultat constă în faptul că avem de-a face cu o punte Wheatstone, care în cazul particular studiat este echilibrată și prin brațul BD nu circulă curent. Montajul rezultat este echivalent cu un montaj din două rezistențe de valori $2r$ puse în paralel.

E 3.66. Se cere să se calculeze rezistența echivalentă a circuitului alcătuit din conductoare de rezistențe egale reprezentînd muchiile unui cub dacă:

a) curentul electric intră printr-un vîrf al cubului și iese prin vîrfurile opuse;

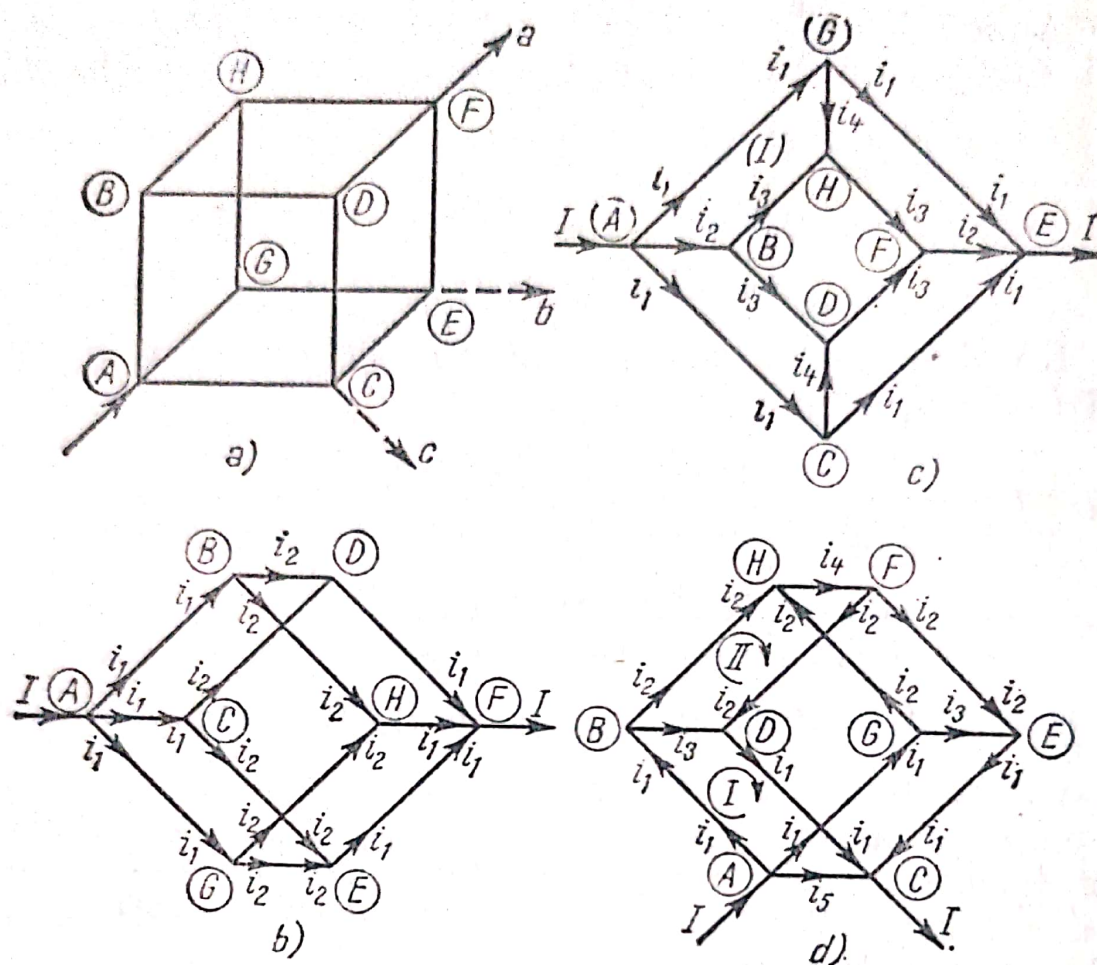


Fig. E 3.66

b) curentul electric intră printr-un vîrf și iese prin vîrfurile situate pe diagonala aceleiași fețe;

c) curentul electric intră printr-un vîrf și iese prin vîrfurile situate pe aceeași latură.

Rezolvare. a) Schema plană (aplatizată) a circuitului este cea din fig. E 3.66, b.

Din considerente de simetrie intensitățile curenților din laturile circuitului sînt reprezentate ca în figură.

Cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff se pot scrie următoarele relații:

$$(A) \quad I = 3i_1 \quad (1)$$

$$(B) \quad i_1 = 2i_2 \quad (2)$$

Rezultă

$$i_1 = \frac{I}{3}, \quad i_2 = \frac{I}{6}.$$

Căderea de tensiune între vîrfurile A și F este

$$U_{AF} = U_{AG} + U_{GE} + U_{EF}$$

sau

$$RI = ri_1 + ri_2 + ri_1$$

unde R este rezistența echivalentă a circuitului; obținem

$$RI = r \left(\frac{I}{3} + \frac{I}{6} + \frac{I}{3} \right)$$

și rezultă

$$R = \frac{5}{6} r.$$

b) Schema plană echivalentă a circuitului este reprezentată în fig. E 3.66, c.

Cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff se pot scrie următoarele relații:

$$(A) \quad I = 2i_1 + i_2 \quad (1)$$

$$(G) \quad i_1 = i_1 + i_4 \quad (2)$$

$$(B) \quad i_2 = 2i_3 \quad (3)$$

$$(I) \quad i_1 + i_4 = i_3 + i_2. \quad (4)$$

Din relația scrisă în nodul (G) rezultă: $i_4 = 0$.

Din (1) se deduce

$$i_1 = \frac{I - i_2}{2}$$

Din (2) se deduce

$$i_3 = \frac{i_2}{2}.$$

Din relația scrisă în ochiul (I), în care se înlocuiesc i_1 și i_3 cu expresiile de mai sus, rezultă

$$\frac{I - i_2}{2} = \frac{i_2}{2} + i_2$$

de unde

$$i_2 = \frac{I}{4}.$$

Rezultă și

$$i_3 = \frac{I}{8}, \quad i_1 = \frac{3I}{8}.$$

Căderea de tensiune între vîrfurile A și E este

$$U_{AE} = U_{AG} + U_{GE} = r$$

$$RI = 2ri_1, \quad RI = 2r \frac{3I}{8}$$

$$R = \frac{3}{4} r.$$

c) Schema plană a circuitului este prezentată în fig. E 3.66, d; avem:

$$(A) \quad I = 2i_1 + i_5 \quad (1)$$

$$(B) \quad i_1 = i_2 + i_3 \quad (2)$$

$$(H) \quad 2i_2 = i_4 \quad (3)$$

$$(I) \quad 2i_1 + i_3 - i_5 = 0 \quad (4)$$

$$(II) \quad 2i_2 + i_4 - i_3 = 0. \quad (5)$$

$$\text{Din (1) rezultă} \quad i_5 = I - 2i_1, \quad (6)$$

$$\text{din (3)} \quad i_4 = 2i_2, \quad (7)$$

$$\text{din (5) și (7)} \quad i_3 = 4i_2; \quad (8)$$

$$\text{din (2) și (8) rezultă} \quad i_1 = 5i_2 \quad (9)$$

$$\text{iar din (4), (6) și (8)} \quad 4i_1 + 4i_2 = I \quad (10)$$

sistemul (9) și (10) conduce la

$$i_1 = \frac{5}{24} I, \quad i_2 = \frac{1}{24} I$$

iar (6) (7) și (8) conduc la

$$i_3 = \frac{4}{24} I, \quad i_4 = \frac{2}{24} I, \quad i_5 = \frac{14}{24} I.$$

Se obține

$$R = \frac{14}{24} r = \frac{7}{12} r,$$

E 3.67. Se cere să se determine capacitatea echivalentă C_e a bateriei de condensatoare din figura E 3.67, a dacă $C_1 = C_4 = C_5 = C$; $C_6 = C_2 = 2C$; $C_3 = 3C$ [16].

Rezolvare. Prin transtigurare se obține schema din fig. E 3.67, b, identică cu cea dată, pe care este mai ușor vizibilă așezarea celor șase condensatoare.

Identificăm pe această figură patru noduri (A , B , C , D) și trei ochiuri (I, II, III).

Se alege semnul sarcinilor electrice pe fiecare armătură a celor șase condensatoare și se scrie prima teoremă

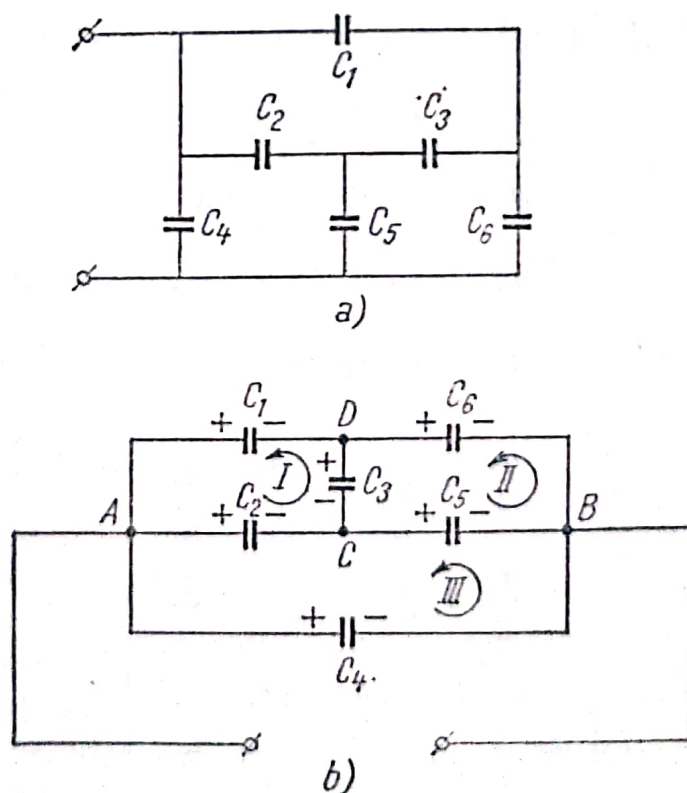


Fig. E 3.67

a lui Kirchhoff (3.58) în trei din nodurile din figură; se obține astfel:

$$\begin{array}{ll} (A) & q_1 + q_2 + q_4 = Q \\ (B) & q_6 + q_5 + q_4 = Q \end{array} \quad (C) \quad q_2 + q_3 - q_5 = 0$$

unde: q_i este sarcina electrică pe armăturile condensatorului i , Q — sarcina electrică pe armăturile condensatorului echivalent.

Se scrie a doua teoremă a lui Kirchhoff (3.59) în ochiurile rețelei, sensul de parcurs ales pentru fiecare ochi fiind cel indicat de figură. Se obțin astfel următoarele relații:

$$\begin{array}{ll} (I) & \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} = 0 \\ (II) & \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_5}{C_5} - \frac{q_6}{C_6} = 0 \\ (III) & \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_4}{C_4} + \frac{q_5}{C_5} = 0. \end{array}$$

Introducând datele din problemă sistemul devine

$$q_1 + q_2 + q_4 = Q \quad (1)$$

$$q_4 + q_5 + q_6 = Q \quad (2)$$

$$q_2 + q_3 - q_5 = 0 \quad (3)$$

$$q_1 - \frac{q_2}{2} + \frac{q_3}{3} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{q_3}{3} + q_5 - \frac{q_6}{2} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{q_2}{2} - q_4 + q_5 = 0. \quad (6)$$

Rezolvarea sistemului se face astfel:
Din (4) rezultă

$$q_1 = \frac{3q_2 - 2q_3}{6}, \quad (7)$$

din (3) rezultă

$$q_5 = q_2 + q_3, \quad (8)$$

din (6) și (8) rezultă

$$q_4 = \frac{q_2}{2} + q_5 = \frac{3q_2}{2} + q_3, \quad (9)$$

din (2) și (8) rezultă

$$q_6 = Q - q_5 - q_4 = Q - \frac{5}{2}q_2 - 2q_3. \quad (10)$$

Introducând q_1 , q_5 , q_4 și q_6 funcție de q_2 și q_3 în ecuațiile (1) și (5) rezultă sistemul

$$\begin{aligned} 9q_2 + 2q_3 &= 3Q \\ 27q_2 + 28q_3 &= 6Q \end{aligned}$$

a cărui rezolvare duce la soluțiile $q_2 = \frac{8}{22}Q$ și $q_3 = -\frac{3Q}{22}$, care, înlocuite în (7), (8), (9) și (10) conduc la

$$q_1 = \frac{5}{22}Q, \quad q_5 = \frac{5Q}{22}, \quad q_4 = \frac{9}{22}Q, \quad q_6 = \frac{8}{22}Q.$$

Se scrie apoi că tensiunea la bornele condensatorului echivalent este egală cu cea de la bornele bateriei de condensatoare, respectiv

$$\frac{Q}{C_e} = \frac{q_4}{C_4} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_6}{C_6} = \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_5}{C_5},$$

de unde rezultă

$$C_e = \frac{22}{9}C.$$

3.18. Metoda curenților ciclici

3.18.1. *Principiul metodei; domeniu de aplicabilitate.*
Metoda curenților ciclici se folosește pentru calculul rețelilor electrice cu multe noduri și puține ochiuri independente.

După această metodă se presupune că prin laturile unui ochi circulă același curent ciclic ales în sens arbitrar. Curenții din laturi se obțin ca funcție de curenții ciclici aleși prin metoda suprapunerii.

3.18.2. *Noțiuni de bază; definiții; notații; relații.* Pentru aplicarea acestei metode se folosesc aceleași mărimi și relații de la teoremele lui Kirchhoff.

3.18.3. *Ecuatiile metodei.* Ecuatiile ce stau la baza determinării curenților ciclici se stabilesc prin aplicarea celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff pentru fiecare ochi din cele $o = z - n + 1$ ce se iau în considerație în calcule; ele sînt de forma:

$$R_{11}I'_1 + R_{12}I'_2 + \dots + R_{1n}I'_n = \sum_1 E_i \quad (\text{ochiul } 1)$$

$$R_{21}I'_1 + R_{22}I'_2 + \dots + R_{2n}I'_n = \sum_2 E_i \quad (\text{ochiul } 2)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad (3.62)$$

$$R_{n1}I'_1 + R_{n2}I'_2 + \dots + R_{nn}I'_n = \sum_n E_i \quad (\text{ochiul } n)$$

unde R_{ij} este suma rezistențelor laturilor comune ochiurilor i și j , cu semnul plus dacă curenții ciclici I'_i și I'_j au același sens și cu semnul minus dacă au sensuri contrare, $\sum E_i$ este suma algebrică a t.e.m. impri-mate, corespunzătoare laturilor ochiului k , cu semnul plus dacă t.e.m. corespunde cu sensul de parcurgere ales și cu semnul minus în caz contrar.

3.18.4. *Programul metodei.* La aplicarea metodei se parcurg următoarele etape:

- se identifică în rețeaua dată ochiurile rețelei după aceleași reguli ca la metoda teoremelor lui Kirchhoff;
- se stabilesc sensurile arbitrare ale curenților ciclici din fiecare ochi;

- se aplică teorema a II-a a lui Kirchhoff pentru fiecare ochi și se rezolvă sistemul obținut;

- se stabilește un sens arbitrar pentru curenții din laturi și se calculează valoarea lor prin suprapunerea curenților ciclici după regula că curentul dintr-o latură este suma algebrică a curenților ciclici ce trec prin

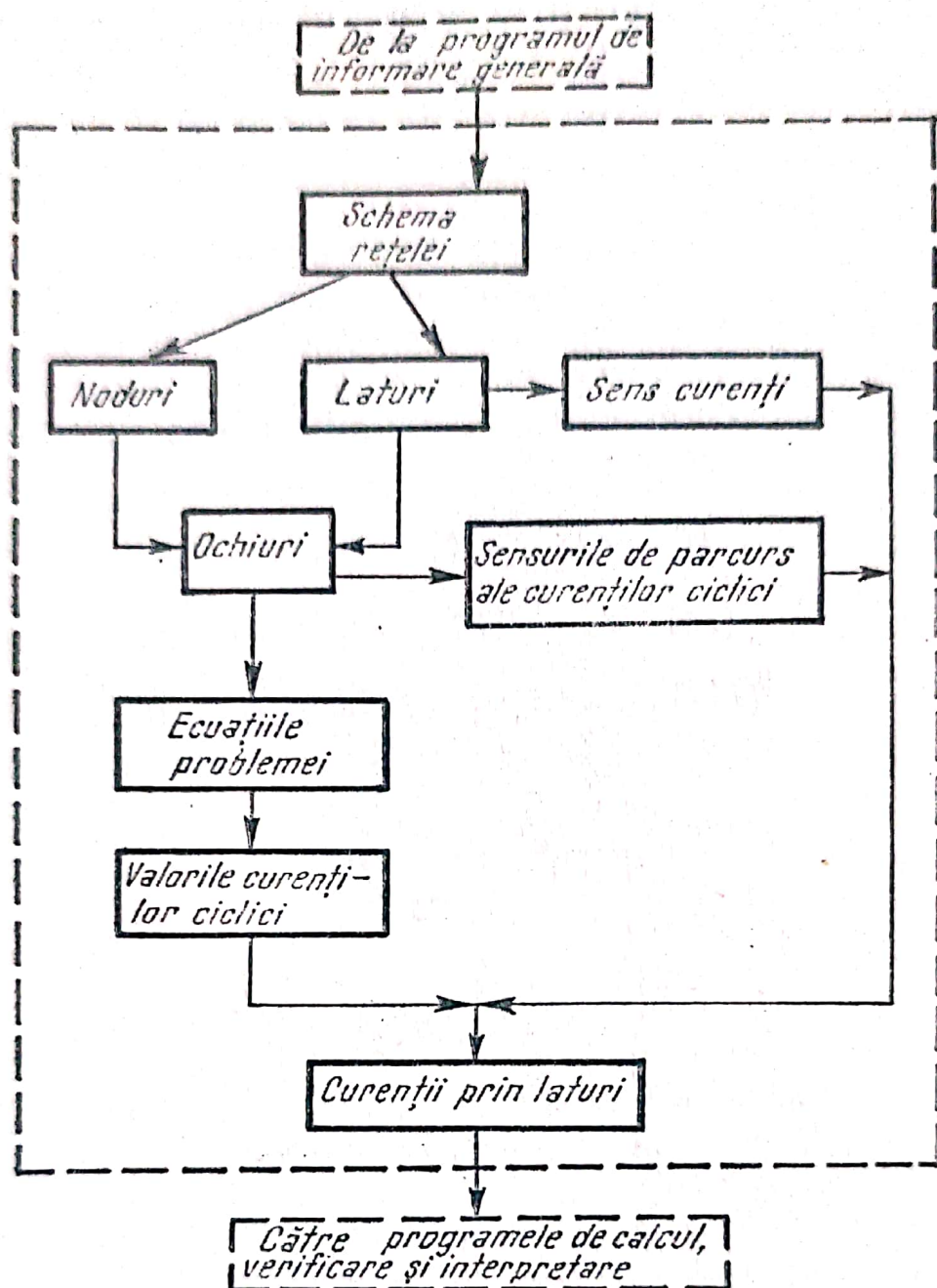


Fig. 3.49

acea latură. Sensul curențului ciclic se consideră cu semnul plus dacă coincide cu cel arbitrar ales prin latură.

Programul acestei metode este prezentat în fig. 3.49.

3.18.5. *Indicații și precizări.* Nu există indicații speciale la aplicarea acestei metode.

3.18.6. *Exemple de aplicare a metodei.*

E 3.68. Se cere să se determine curenții din laturile rețelei din figura 3.68, știind că: $E_1 = 40 \text{ V}$; $E_2 =$

$= 20 \text{ V}; R_1 = 2 \Omega; R_2 = 2 \Omega; R_3 = 1 \Omega; R_4 = 8 \Omega;$
 $R_5 = 4 \Omega; R_6 = 6 \Omega [6].$

Rezolvare. Rețeaua are patru noduri, șase laturi și trei ochiuri. Sensurile curenților ciclici sînt arătate în fig. E 3.68:

- ochiul *I* este parcurs de curentul ciclic I'_1 ,
- ochiul *II* este parcurs de curentul ciclic I'_2 ,
- ochiul *III* este parcurs de curentul ciclic I'_3 .

Se scriu ecuațiile ce rezultă din aplicarea celei de a II-a teoreme a lui Kirchhoff pentru cele trei ochiuri. Se obține:

$$(I) \quad 11I'_1 + I'_2 - 8I'_3 = -40$$

$$(II) \quad I'_1 + 7I'_2 + 4I'_3 = -20$$

$$(III) \quad -8I'_1 + 4I'_2 + 18I'_3 = 0.$$

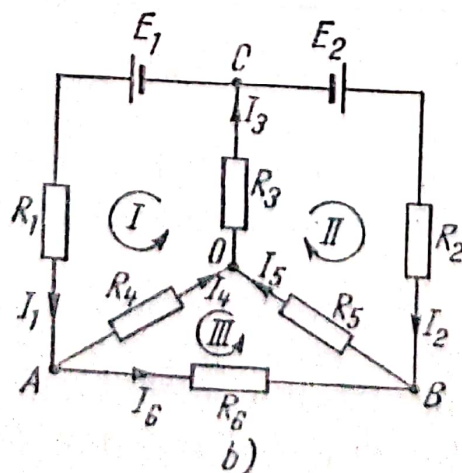
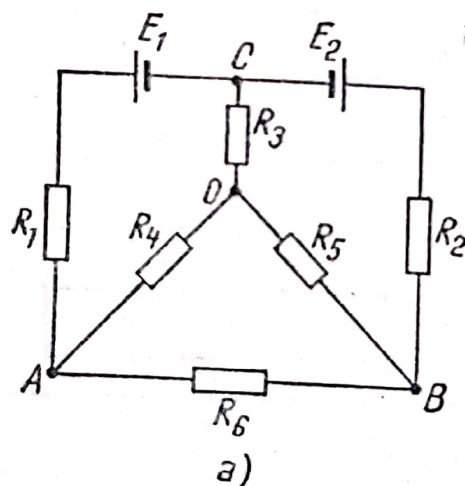


Fig. E 3.68

Coeficienții necunoscutelor din sistemul de ecuații sînt

$$R_{11} = R_1 + R_4 + R_3 = 11 \, \Omega, \quad R_{12} = R_3 = 1 \, \Omega, \\ R_{13} = -R_4 = -8 \, \Omega$$

$$R_{22} = R_3 + R_2 + R_5 = 7 \, \Omega, \quad R_{21} = R_3 = 1 \, \Omega, \\ R_{23} = R_5 = 4 \, \Omega$$

$$R_{33} = R_4 + R_5 + R_6 = 18 \, \Omega, \quad R_{31} = -R_4 = -8 \, \Omega, \\ R_{32} = R_5 = 4 \, \Omega$$

$$\sum_i E_i = -E_1 = -40 \, \text{V} \quad \sum_{ii} E_i = -E_2 = -20 \, \text{V},$$

$$\sum_{iii} E_i = 0.$$

Rezolvînd sistemul se obține

$$I'_1 = -5 \, \text{A}; \quad I'_2 = -1 \, \text{A}; \quad I'_3 = -2 \, \text{A}.$$

Curenții din laturi au deci valorile

$$I_1 = I'_1 = -5 \, \text{A}, \quad I_2 = I'_2 = -1 \, \text{A},$$

$$I_3 = I'_2 + I'_1 = -6 \, \text{A}$$

$$I_4 = I'_1 - I'_3 = -3 \, \text{A}, \quad I_5 = I_2 + I'_3 = -3 \, \text{A},$$

$$I_6 = I'_3 = -2 \, \text{A}.$$

Se observă că pentru obținerea celor șase curenți din laturi s-a rezolvat un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute și nu unul cu șase ecuații și șase necunoscute cum ar fi rezultat dacă pentru calculul rețelei s-ar fi folosit metoda teoremelor lui Kirchhoff.

E 3.69. În rețeaua din figura E 3.69, a se cunosc: $E_1 = 85 \, \text{V}$; $E_2 = 16 \, \text{V}$; $E_3 = 21 \, \text{V}$; $R_4 = 5 \, \Omega$; $R_5 = R_8 = 4 \, \Omega$; $R_6 = 1 \, \Omega$; $R_7 = 2 \, \Omega$; $R_9 = 6 \, \Omega$ [6].

Rezolvare. Rețeaua dată are patru ochiuri, șase noduri și nouă laturi. Sensurile curenților ciclici au fost alese cele din figura E 3.69, b:

— în laturile ochiului I există curenul ciclic I'_1

— în laturile ochiului II există curenul ciclic I'_2

— în laturile ochiului III există curenul ciclic I'_3 .

Pentru rezolvarea acestei rețele metoda cea mai indicată de aplicat este metoda curenților ciclici,

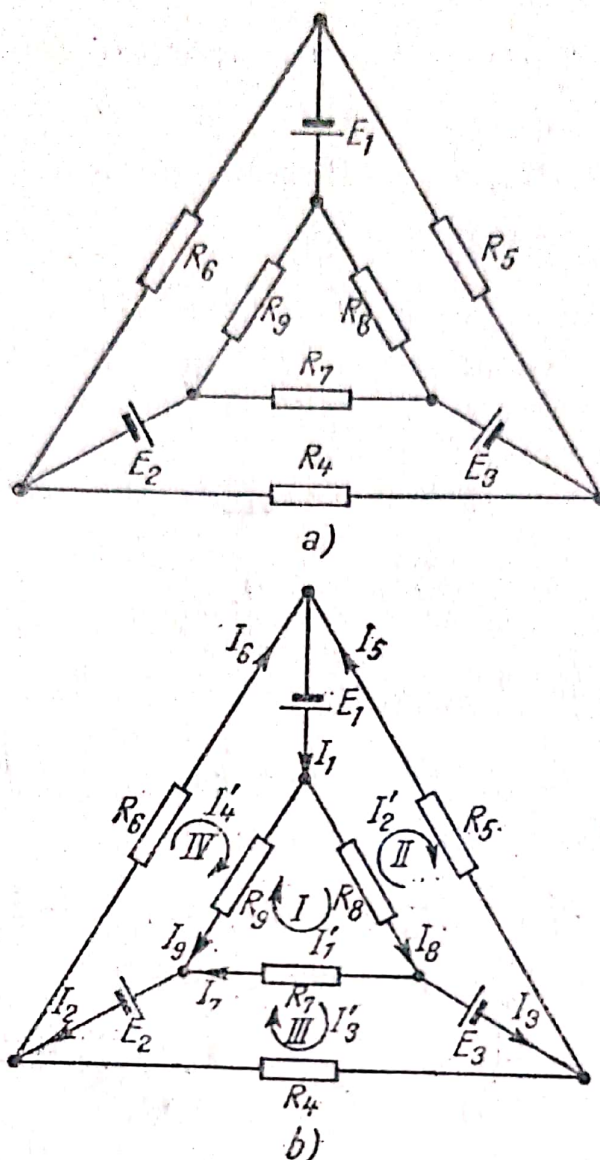


Fig. E 3.69

deoarece după cum rezultă din schemă rețeaua are un număr mic de ochiuri, în comparație cu numărul de noduri și de laturi.

Se scriu ecuațiile ce rezultă din aplicarea celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff pentru cele patru ochiuri și se obține sistemul:

$$(I) (R_7 + R_8 + R_9)I'_1 - R_8I'_2 - R_7I'_3 - R_9I'_4 = 0$$

$$(II) -R_8I'_1 + (R_5 + R_8)I'_2 = E_3 - E_1$$

$$(III) -R_7I'_1 + (R_7 + R_4)I'_3 = E_2 - E_3$$

$$(IV) -R_9I'_1 + (R_9 + R_6)I'_4 = E_1 - E_2$$

Înlocuind valorile numerice se obține sistemul

$$12I'_1 - 4I'_2 - 2I'_3 - 6I'_4 = 0 \quad (1)$$

$$4I'_1 - 8I'_2 = 64 \quad (2)$$

$$2I'_1 - 7I'_3 = 5 \quad (3)$$

$$-6I'_1 + 7I'_4 = 69 \quad (4)$$

Din (2), (3) și (4) rezultă

$$I'_2 = \frac{I'_1}{2} - 8 \quad (5), \quad I'_3 = \frac{2I'_1 - 5}{7} \quad (6), \quad I'_4 = \frac{69 + 6I'_1}{7} \quad (7)$$

care introduse în (1) dau

$$12I'_1 - 2I'_1 + 32 - \frac{4I'_1 - 10}{7} - \frac{414 + 36I'_1}{7} = 0$$

$$30I'_1 = 180, \text{ de unde } I'_1 = 6 \text{ A.}$$

Din (5), (6) și (7) rezultă

$$I'_2 = -5 \text{ A}; \quad I'_3 = 1 \text{ A}; \quad I'_4 = 15 \text{ A.}$$

Alegînd ca sens al curenților din laturi cel indicat în figura E 3.69, b se obține

$$I_1 = -I'_2 + I'_4 = 5 + 15 = 20 \text{ A}$$

$$I_2 = I'_4 - I'_3 = 15 - 1 = 14 \text{ A}$$

$$I_3 = I'_3 - I'_2 = 1 + 5 = 6 \text{ A}$$

$$I_4 = I'_3 = 1 \text{ A}$$

$$I_5 = -I'_2 = 5 \text{ A}$$

$$I_6 = I'_4 = 15 \text{ A}$$

$$I_7 = I'_1 - I'_3 = 6 - 1 = 5 \text{ A}$$

$$I_8 = I'_1 - I'_2 = 6 + 5 = 11 \text{ A}$$

$$I_9 = I'_4 - I'_1 = 15 - 6 = 9 \text{ A.}$$

3.19. Metoda tensiunilor între noduri

3.19.1 *Principiul metodei; domeniu de aplicabilitate.* Metoda constă în alegerea ca valoare de referință a potențialului unui nod al rețelei considerat egal cu zero și folosirea potențialelor celorlalte noduri ca necunoscute. Se obține astfel un sistem de $n - 1$ ecuații (n fiind numărul total al nodurilor) a cărui rezolvare duce la determinarea potențialelor nodurilor și apoi a intensității curenților din laturi.

Metoda se aplică dacă numărul ochiurilor rețelei ce pot fi luate în considerație în calculul respectiv $o = z - n + 1$ este mai mare ca $n - 1$.

3.19.2. *Noțiuni de bază; definiții; notații; relații.* Mărimile folosite sînt aceleași ca la metodele precedente.

3.19.3. *Ecuațiile metodei.* Ecuația corespunzătoare unui nod oarecare j al rețelei este

$$V_j \sum_{(j)} G_j - \sum_{(j)} G_{jk} V_k + \sum_{(j)} G_{jk} E_{jk} = 0, \\ (j = 1, 2, \dots, n - 1) \quad (3.63)$$

unde: $\sum_{(j)} G_j$ — suma conductanțelor laturilor legate la nodul j și are totdeauna semnul plus;

$\sum_{(j)} G_{jk} V_k$ — suma conductanțelor laturilor ce se întîlnesc în nodul j , înmulțite fiecare cu potențialul celui alt nod la care sînt legate aceste laturi și are totdeauna semnul minus;

$\sum_{(j)} G_{jk} E_{jk}$ — suma conductanțelor laturilor legate la nodul j , înmulțite cu tensiunea electromotoare din laturile respective (exprimate față de sensul de referință de la nodul considerat j spre celalalte noduri k).

Se scriu astfel $n - 1$ ecuații ale căror necunoscute sînt potențialele nodurilor.

După rezolvarea sistemului, curenții din laturi se obțin prin aplicarea legii lui Ohm generalizate cu ajutorul relației

$$I_{jk} = G_j(V_j - V_k + E_{jh}). \quad (3.64)$$

3.19.4. Programul metodei este prezentat în figura 3.50.

3.19.5. Indicații și precizări. Nu există indicații speciale la aplicarea acestei metode.

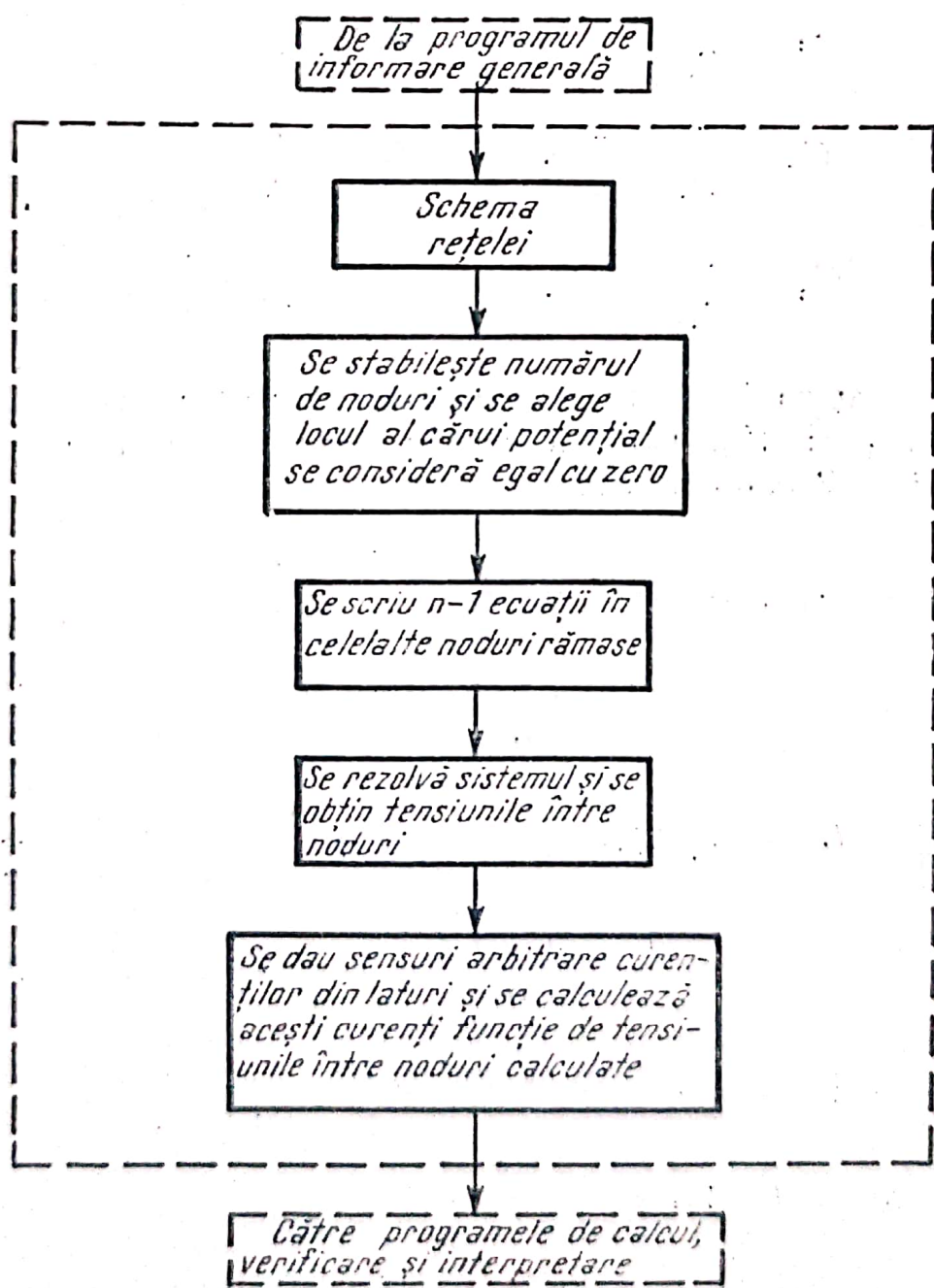


Fig. 3.50

3.19.6. Exemple de aplicare a metodei.

E 3.70. Să se calculeze curenții din laturile rețelei din exemplul 3.59 (pag. 300) cu ajutorul metodei tensiunilor între noduri.

Rezolvare. Rețeaua din figură are $n = 3$ noduri. Se alege nodul B ca nod al cărui potențial se consideră egal cu zero.

Conductanțele laturilor rețelei sînt

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{R_1} = \frac{1}{2} \text{ S}, & G_4 &= \frac{1}{R_4} = \frac{1}{10} \text{ S}, \\ G_2 &= \frac{1}{R_2} = \frac{1}{4} \text{ S}, & G_5 &= \frac{1}{R_5} = \frac{1}{20} \text{ S}, \\ G_3 &= \frac{1}{R_3} = \frac{1}{1} \text{ S}, & G_6 &= \frac{1}{R_6} = \frac{1}{10} \text{ S}. \end{aligned}$$

Se aleg ca tensiuni necunoscute între noduri tensiunile V_A și V_G . Conductanțele care intervin în cele $n - 1 = 2$ ecuații sînt

$$\begin{aligned} G_A &= G_1 + G_2 + G_4 + G_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \\ &= \frac{10 + 5 + 2 + 1}{20} = \frac{9}{10} \text{ S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_G &= G_2 + G_3 + G_5 + G_6 = \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = \\ &= \frac{5 + 20 + 1 + 2}{20} = \frac{7}{5} \text{ S} \end{aligned}$$

$$G_{AC} = G_{CA} = G_2 + G_6 = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{3}{10} \text{ S}.$$

Ecuațiile sînt (3.61)

$$\begin{aligned} G_A V_A - G_{AC} V_C &= G_2 E_2 - G_1 E_1 \\ -G_{CA} V_A + G_G V_G &= -G_2 E_2 - G_3 E_3 \end{aligned}$$

și înlocuind valorile numerice

$$\begin{aligned}\frac{9}{10} V_A - \frac{3}{10} V_C &= \frac{140}{4} - \frac{130}{2} \\ -\frac{3}{10} V_A + \frac{7}{5} V_C &= -\frac{140}{4} - 215.\end{aligned}$$

Din rezolvarea sistemului rezultă

$$V_A = -100 \text{ V}, \quad V_C = -200 \text{ V}.$$

Curenții din laturile circuitului sînt (3.62)

$$I_1 = \frac{V_A + E_1}{R_1} = \frac{-100 + 130}{2} = 15 \text{ A},$$

$$I_4 = -\frac{V_A}{R_4} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A}$$

$$I_2 = -\frac{V_A - E_2}{R_1} = -\frac{100 - 140}{4} = 10 \text{ A},$$

$$I_5 = \frac{V_A}{R_5} = \frac{V_A - V_B}{R_5} = \frac{-100 + 200}{20} = 5 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{V_C + E_3}{R_3} = \frac{-200 + 215}{1} = 15 \text{ A},$$

$$I_6 = -\frac{V_C}{R_6} = \frac{200}{10} = 20 \text{ A}.$$

Verificarea se face folosind bilanțul puterilor.
Puterea debitată de surse este

$$\begin{aligned}P_d = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 &= 130 \times 15 + 140 \times 10 + \\ &+ 215 \times 15 = 1950 + 1400 + 3225 = 6575 \text{ W}.\end{aligned}$$

Puterea consumată de rezistențe

$$\begin{aligned}P_R = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + \\ + R_6 I_6^2 &= 2 \times 15^2 + 4 \times 10^2 + 1 \times 15^2 + \\ &+ 10 \times 10^2 + 20 \times 5^2 + 10 \times 20^2 = 450 + 400 + \\ &+ 225 + 1000 + 500 + 4000 = 6575 \text{ W}.\end{aligned}$$

Rezultă egalitatea dintre puterea debitată și cea consumată în circuit, ceea ce atestă faptul că determi-

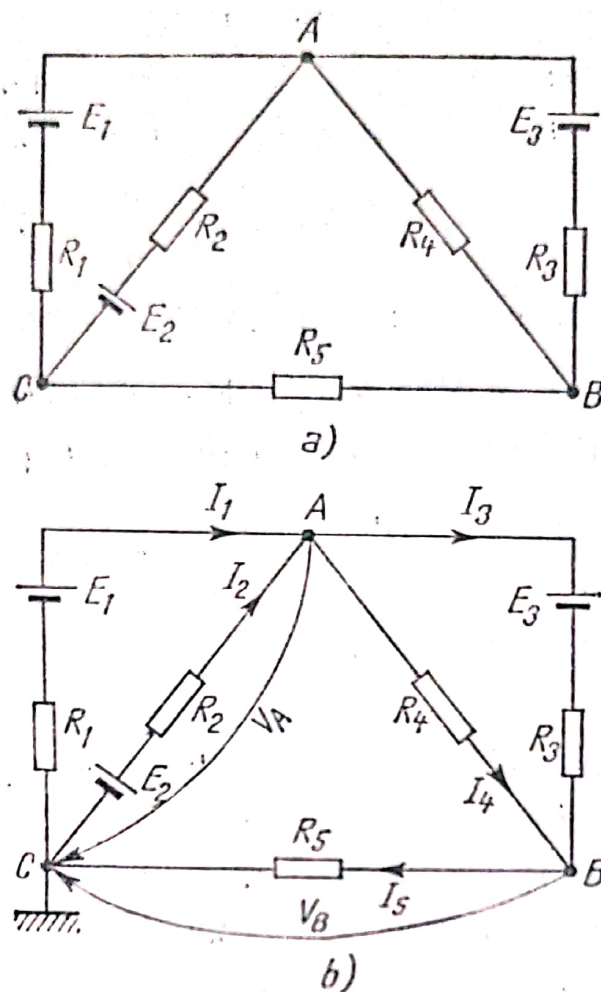


Fig. E 3.71

narea intensităților curenților prin laturile circuitului este corectă.

E 3. 71. Se dă rețeaua din figura E 3. 71, a, în care se cunosc: $E_1 = 205 \text{ V}$; $E_2 = 136 \text{ V}$; $E_3 = 10 \text{ V}$; $R_1 = 5 \Omega$; $R_2 = R_3 = 2 \Omega$; $R_4 = 1 \Omega$; $R_5 = 4 \Omega$.

Să se calculeze curenții din laturi, aplicîndu-se metoda tensiunilor între noduri [6].

Rezolvare. Rețeaua are trei noduri. Se alege nodul C ca nod al cărui potențial se consideră egal cu zero.

Conductanțele laturilor rețelei sînt

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{5} \text{ S}; \quad G_2 = G_3 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2} \text{ S};$$

$$G_4 = \frac{1}{R_4} = 1 \text{ S}; \quad G_5 = \frac{1}{R_5} = \frac{1}{4} \text{ S}.$$

Se aleg ca tensiuni necunoscute între noduri tensiunile V_A și V_B (fig. E 3. 71, b).

Conductanțele celor două ecuații sînt.

$$G_A = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 = \frac{1}{5} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{11}{5} \text{ S}$$

$$G_B = G_3 + G_4 + G_5 = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{7}{5} \text{ S}$$

$$G_{AB} = G_{BA} = G_4 + G_3 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ S}$$

Ecuațiile ce se pot scrie sînt următoarele:

$$G_A V_A - G_{AB} V_B = G_1 E_1 + G_2 E_2 + G_3 E_3 \\ - G_{BA} V_A + G_{BB} V_B = - G_3 E_3$$

Introducînd valorile numerice rezultă sistemul

$$\frac{11}{5} V_A - \frac{3}{2} V_B = \frac{1}{5} 205 + \frac{1}{2} 136 + \frac{1}{2} 10; \\ - \frac{3}{2} V_A + \frac{7}{4} V_B = - \frac{1}{2} 10$$

ale cărui soluții sînt

$$V_A = 120 \text{ V}; \quad V_B = 100 \text{ V.}$$

Curenții din laturile circuitului sînt

$$I_1 = \frac{1}{R_1} (-V_A + E_1) = \frac{1}{5} (-120 + 205) = 17 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{1}{R_2} (-V_A + E_2) = \frac{1}{2} (-120 + 136) = 8 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{1}{R_3} (V_A - V_B - E_3) = \frac{1}{2} (120 - 100 - 10) = 5 \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{1}{R_4} (V_A - V_B) = 120 - 100 = 20 \text{ A}$$

$$I_5 = \frac{V_B}{R_5} = \frac{100}{4} = 25 \text{ A.}$$

Verificarea se realizează făcînd bilanțul puterilor:

— Puterea debitată de surse

$$P_d = E_1 I_1 + E_2 I_2 - E_3 I_3 = 205 \times 17 + 136 \times 8 - 10 \times 5 = 4523 \text{ W};$$

— Puterea consumată de rezistențe

$$\begin{aligned} P_R &= R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 = \\ &= 5 \times 17^2 + 2 \times 8^2 + 2 \times 5^2 + 1 \times 20^2 + \\ &\quad + 4 \times 25^2 = 4523 \text{ W}. \end{aligned}$$

Deoarece rezultă că puterea debitată de surse este egală cu cea consumată de rezistoare, se confirmă corectitudinea calculului făcut.

3.20. Concluzii

Din prezentarea celor cîteva metode de calcul folosite pentru rezolvarea problemelor de fizică se pot trage o serie de concluzii importante și anume:

a) Metodele de calcul reprezintă generalizarea unei experiențe bazată pe rezolvarea unui mare număr de probleme; de aceea folosirea acestora reprezintă o treaptă superioară în activitatea de rezolvare a problemelor.

b) Însușirea acestora necesită aplicarea lor pe un număr mare de cazuri; se impune deci ca cei ce sînt interesați în învățarea sistematică a fizicii să le aplice ori de cîte ori acest lucru este posibil, renunțînd la rezolvarea problemelor în maniera pe care o practicau pînă acum.

c) Metodele prezentate și exemplele de calcul ce le însoțesc pot constitui modele de felul în care poate fi degajată o metodă generală dintr-un mare număr de probleme asemenea; rezolvarea lor subliniază trăsăturile esențiale și arată cum se elaborează o metodică generală de calcul valabilă la rezolvarea unei mari categorii de probleme.

d) Rezolvarea problemelor cu ajutorul metodelor generale de calcul dezvoltă capacitatea de a sintetiza, generaliza, ordona și sistematiza materialul studiat.

TIPURI DE PROBLEME

4.1. Generalități

După citirea enunțului unei probleme de fizică primul lucru pe care-l facem este acela de a încerca să stabilim capitolul sau capitolele la care va trebui să apelăm pentru rezolvarea ei în totalitate sau a diferitelor ei puncte, gradul de dificultate, respectiv tipul sau clasa de probleme în care să fie inclusă. Dacă stabilirea capitolelor din fizică cărora le aparține conținutul și la care trebuie făcut apel pentru rezolvare este o chestiune relativ ușoară, mai dificilă este însă găsirea tipului de problemă căruia îi aparține. Recunoașterea tipului de problemă este absolut necesară pentru că aceasta poate sugera modul de rezolvare. Se explică astfel necesitatea clasificării problemelor, prezentarea diverselor tipuri generale de probleme.

Capitolele de fizică la care se referă conținutul enunțului pun în evidență fenomenele, respectiv legile și relațiile sau metodele de calcul la care trebuie făcut apel pentru rezolvare.

Se poate întrevădea astfel de la început gradul de dificultate al problemei, încadrarea ei în unul din tipurile stabilite.

Un tip de problemă se caracterizează prin anumite aspecte comune unei mari categorii de probleme; el poate constitui un model și poate da o schemă utilă pentru rezolvarea altor probleme similare. Aceste modele și scheme nu dau rețeta rezolvării oricărei probleme;

ele ajută însă la sublinierea unor anumite aspecte ale problemei examinate, ce sînt utile și la tratarea altor probleme.

O clasificare detaliată a tipurilor de probleme de fizică se poate face pe diferite criterii dar o prezentare completă este deosebit de dificilă. De aceea ne vom opri la o clasificare pe criteriul gradului de dificultate pe care îl prezintă rezolvarea unei probleme. Acest criteriu de clasificare este de o mai mare utilitate practică și se înscrie pe linia scopului propus în prezenta lucrare.

Analizînd cu atenție un număr mare de probleme din diferite capitole ale fizicii se observă că ele au grade de dificultate diferite; aceasta înseamnă că rezultatele cerute se obțin mai ușor sau mai greu după cum ele sînt mai mult sau mai puțin ascunse de aspectele fizice și geometrice care apar în fenomenele tratate în problema respectivă.

O împărțire a tuturor problemelor de fizică după gradul lor de dificultate este desigur o operație destul de dificilă. Fără a avea pretenția unei delimitări exhaustive, cu granițe rigide, în interiorul căroră să se fi introdus tot ceea ce se poate imagina ca problemă de fizică, în cele ce urmează se prezintă cele mai importante tipuri de probleme, clasificate de noi, în ordinea crescătoare a gradului lor de dificultate. Prezentarea acestor tipuri de probleme este însoțită de exemple alese dintre problemele prezentate la diferite concursuri sau care sînt publicate în lucrările de specialitate.

4.2. Tipul întâi: probleme care se rezolvă prin înlocuirea directă a datelor

Acesta este cel mai simplu tip de problemă; rezolvarea sa solicită mai puțin raționamentul și mai mult memoria; este suficient ca în formula care conține datele problemei (formulă care face parte din bagajul de relații ce trebuie cunoscute) să se introducă datele din enunț (cu eventualele transformări de unități), să se efectueze calculul numeric și se obține direct rezultatul cerut.

Uneori, la aceste operații simple mai trebuie adăugate și relații geometrice, de asemenea destul de simple.

Dificultatea acestor probleme (dacă se poate numi astfel) constă în alegerea corectă a formulei de rezolvare; un ghid sigur pentru aceasta îl constituie datele din enunț.

Aceste probleme sînt cele mai simple; cu asemenea tip de problemă se începe pregătirea unui nou capitol predat, în vederea familiarizării cu proprietățile, mărimile fizice, fenomenele, legile, formulele sau relațiile matematice dintre mărimi, obișnuința cu mărimile derivate și dimensiunile acestora. Iată cîteva exemple.

E 4.1. Un mobil pleacă din repaus și se mișcă cu accelerația constantă $a = 0,5 \text{ m/s}^2$.

Se cere să se calculeze:

- spațiul străbătut în 5 s;
- viteza pe care o va atinge mobilul după acest interval de timp;
- viteza la $1/5$ din drum;
- considerînd că mobilul are viteză inițială, se cere să se calculeze care este valoarea acesteia; știind că el străbate în același timp și cu aceeași accelerație un spațiu dublu. [15,9/72].

R e z o l v a r e. Trebuie cunoscute cîteva formule clasice de la mișcarea uniform variată în care se introduc datele problemei. Astfel, pentru rezolvarea punctului a) trebuie cunoscută formula spațiului de la mișcarea uniform accelerată fără viteză inițială

$$s = \frac{1}{2} at^2$$

în care înlocuim

$$a = 0,5 \text{ m/s}^2 \text{ și } t = 5 \text{ s.}$$

Rezultă

$$s_1 = \frac{1}{2} \times 0,5 \times 5^2 = 6,25 \text{ m.}$$

Pentru rezolvarea punctului b) trebuie cunoscută formula vitezei în mișcarea uniform accelerată

$$v = at$$

în care înlocuim

$$a = 0,5 \text{ m/s}^2 \text{ și } t = 5 \text{ s.}$$

Rezultă

$$v = 0,5 \times 5 = 2,5 \text{ m/s.}$$

Pentru rezolvarea punctului c) trebuie cunoscută formula care leagă viteza, accelerația și spațiul parcurs de un mobil aflat în mișcarea uniform variată

$$v^2 = v_0^2 \pm 2as$$

în care înlocuim luând semnul + (mișcare uniform accelerată)

$$v_0 = 0, \quad a = 0,5 \text{ m/s}^2 \quad s_2 = \frac{1}{5} \times 6,25 = 1,25 \text{ m.}$$

Rezultă

$$v = \sqrt{2as_1} = \sqrt{2 \times 0,5 \times 1,25} = 1,118 \text{ m/s.}$$

Pentru rezolvarea punctului d) trebuie cunoscută formula spațiului de la mișcarea uniform accelerată cu viteză inițială

$$s = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t$$

în care înlocuim

$$t = 5 \text{ s, } a = 0,5 \text{ m/s}^2, \quad s_3 = 2s_1 = 2 \times 6,25 = 12,5 \text{ m.}$$

Rezultă

$$12,5 = \frac{1}{2} \times 0,5 \times 5^2 + v_0 \cdot 5$$

din care obținem

$$v_0 = 1,25 \text{ m/s.}$$

După cîte se observă, rezolvarea acestei probleme nu prezintă nici o dificultate.

E 4.2. La ce temperatură T_2 se încălzește $m = 5 \text{ kg}$ aer, aflat inițial la temperatura $T_1 = 283 \text{ K}$, pentru

care s-a folosit o cantitate de căldură $Q = 20\,900\text{ J}$ și ce volum ocupă gazul dacă presiunea $p_1 = 98000\text{ N/m}^2$ rămîne constantă?

Se dau: constanta universală a gazelor $R = 8,313 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$, căldura specifică a aerului la presiune constantă $c_p = 1003,2 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{grd}}$, masa moleculară a aerului $M = 28,96 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$.

Rezolvare. Se observă că problema conține două întrebări; cititorul va trebui să aleagă formulele corespunzătoare celor două fenomene care se produc în problemă, încălzirea și transformarea sa izobară, ținînd seama de datele problemei.

Pentru prima întrebare avem

$$Q = mc_p(T_2 - T_1).$$

Rezultă

$$T_2 = T_1 + \frac{Q}{mc_p}.$$

Înlocuind valorile numerice rezultă

$$T_2 = 283 + \frac{20900}{5 \times 1003,2} \approx 287\text{ }^\circ\text{K}.$$

Pentru calculul volumului ocupat de gaz folosim ecuația de stare a gazului

$$p_2 v_2 = \frac{m}{M} \cdot RT_2$$

de unde

$$v_2 = \frac{m}{M} R \frac{T_2}{p_2}$$

Înlocuind valorile numerice și ținînd seama că $p_2 = p_1$ rezultă

$$v_2 = \frac{5}{28,96} \times 8313 \times \frac{287}{98\,000} = 4,2\text{ m}^3$$

Se observă că la rezolvarea acestei probleme s-au folosit numai două formule clasice de fizică.

De multe ori simpla folosire corectă a unei formule din capitolul căruia îi aparține problema respectivă poate conduce aproape singură la soluția acestei probleme; un exemplu în acest sens este prezentat în cele ce urmează.

E 4.3. Într-un disc metalic se face o tăietură în formă de sector (fig. E 4.3). Se va schimba unghiul ce caracterizează această tăietură, dacă discul este încălzit? [7].

Rezolvare. Răspunsul pe care îl capătă cititorul la rubrica „rezolvări” din lucrarea citată este corect, dar surprinde prin raționamentul său, care distonează cu cel al problemelor de acest gen: „prin încălzire uniformă raza discului va crește tot atât cât lungimea arcului. Unghiul nu se schimbă”. Pe bună dreptate el apreciază că o asemenea idee i-ar fi venit cu destulă greutate.

Calea cea mai naturală constă în a face apel la formulele de la capitolul „dilatarea corpurilor” și anume la cea care se referă la dilatarea suprafețelor.

$$A_t = A_0 (1 + \beta t) \quad (1)$$

Notînd cu $\varphi = 360^\circ - \alpha$ unghiul la centru al părții pline a discului și presupunînd că el se schimbă vom avea pentru disc R_0 , φ_0 și A_0 (raza, unghiul la centru și aria) la zero grade, pe care o considerăm ca temperatură inițială, respectiv R_t , φ_t , A_t aceleași elemente

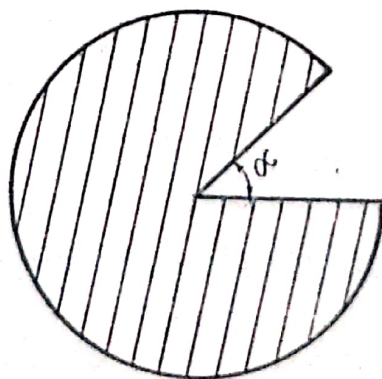


Fig. 4.3

la temperatura t la care discul este încălzit uniform. Aceste elemente sînt legate prin formula menționată în care avem

$$A_t = \frac{R_t^2 \varphi_t}{360} ; \quad A_0 = \frac{R_0^2 \varphi_0}{360} .$$

Înlocuind în (1) rezultă

$$\frac{R_t^2 \varphi_t}{360} = \frac{R_0^2 \varphi_0}{360} (1 + \beta t)$$

sau

$$R_t^2 \varphi_t = R_0^2 \varphi_0 (1 + \beta t). \quad (2)$$

Raza fiind o lungime va trebui să facem uz și de relația care se referă la dilatarea lungimilor

$$R_t = R_0 (1 + \alpha t)$$

cu care

$$R_t^2 = R_0^2 (1 + \alpha t)^2 \approx R_0^2 (1 + 2\alpha t) = R_0^2 (1 + \beta t)$$

deoarece, după cum se știe, $\beta = 2\alpha$.

Înlocuind în (2) și efectuînd simplificările rezultă concluzia de mai sus ($\varphi_t = \varphi_0$) deci și $\alpha_t = \alpha_0$.

Iată cum, fără eforturi deosebite, numai prin consecvență și o logică elementară am putut soluționa această problemă înscriindu-ne pe una din liniile generale de rezolvare a acestui tip de problemă.

E 4.4. Se consideră circuitul electric din figura E 4.4 așezat într-un cîmp magnetic uniform de inducție $B = 0,6$ T, perpendicular pe planul circuitului, sensul liniilor de cîmp fiind de la observator spre planul hîrtiei. Conductoarele AB și CD au rezistențe neglijabile, conductorul MN are rezistența egală cu $0,1 \Omega$, iar rezistorul r are rezistența $r = 0,1 \Omega$.

Conductorul MN de lungime $l = 1$ m, alunecă fără frecare pe cele două conductoare neizolate AB și CD cu viteza constantă $v = 10$ m/s (sensul vitezei fiind de la A la B). Se cer:

a) tensiunea electromotoare indusă în circuit (valoarea și sensul);

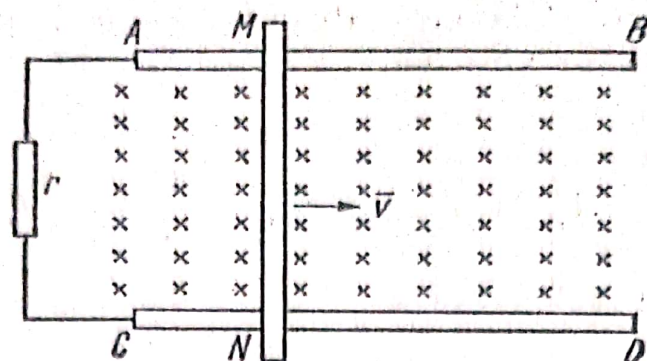


Fig. E 4.4

- b) curentul electric din circuit;
- c) forța de reacțiune a câmpului magnetic care se exercită asupra conductorului MN ;
- d) puterea mecanică necesară pentru deplasarea conductorului MN ;
- e) să se arate că puterea mecanică necesară pentru a deplasa conductorul MN este egală cu puterea disipată în circuitul electric.

(IPB, ingineri, iulie 1972)

Rezolvare. La rezolvarea punctului a) al problemei se aplică formula cunoscută din capitolul de inducție electromagnetică care dă valoarea tensiunii electromotoare ce ia naștere la extremitățile unui conductor de lungime l ce se deplasează normal pe liniile unui câmp de inducție B , cu viteza uniformă v și anume

$$e = Blv.$$

Înlocuind în această relație $B = 0,6 \text{ T}$, $l = 1 \text{ m}$ și $v = 10 \text{ m/s}$ se obține

$$e = 0,6 \times 1 \times 10 = 6 \text{ V}.$$

Sensul curentului ce trece prin acest conductor este reprezentat de sensul de înaintare al burghiului drept atunci când se aduce vectorul ce reprezintă viteza de deplasare a conductorului peste cel ce reprezintă inducția pe drumul cel mai scurt; rezultă astfel că sensul curentului este de la N către M .

La rezolvarea punctului b) se aplică legea lui Ohm pentru un circuit cu două rezistențe de valoare r puse

în serie și o sursă de curent de tensiune electromotoare $\mathcal{E}$ respectiv

$$i = \frac{\mathcal{E}}{2r}.$$

Înlocuind în această relație $\mathcal{E} = 6 \text{ V}$ și $r = 0,1 \text{ } \Omega$ rezultă

$$v = \frac{6}{2 \times 0,1} = 30 \text{ A.}$$

Rezolvarea punctului c) se face folosind formula cunoscută de la capitolul de electromagnetism care dă valoarea forței F ce acționează asupra unui conductor electric de lungime l parcurs de un curent electric de intensitate i , când acesta se deplasează normal pe liniile unui câmp magnetic de inducție B .

Înlocuind $F = Bil$ în această relație $B = 0,6 \text{ T}$; $i = 30 \text{ A}$ și $l = 1 \text{ m}$ rezultă

$$F = 0,6 \times 30 \times 1 = 18 \text{ N.}$$

Sensul acestei forțe este dat de asemenea de sensul de deplasare al burghiului drept atunci când se rotește săgeata ce reprezintă intensitatea curentului i peste vectorul ce reprezintă inducția B pe drumul cel mai scurt; rezultă astfel pentru F sensul de la B spre A .

Puterea mecanică ce se cere la punctul d) se determină ținând seama că asupra conductorului trebuie să acționăm cu o forță F în timp ce acesta se deplasează cu viteza constantă v . În acest caz puterea necesară se obține cu relația

$$P = Fv.$$

Înlocuind în această relație $F = 18 \text{ N}$ și $v = 10 \text{ m/s}$ se obține

$$P = 18 \times 10 = 180 \text{ W.}$$

Pentru rezolvarea punctului e) al problemei este necesar să se calculeze puterea disipată în circuitul

electric alcătuit din cele două rezistoare r , parcurse de curentul i , cu ajutorul formulei

$$P_d = 2ri^2.$$

Înlocuind în această relație $r = 0,1 \ \Omega$ și $i = 30 \text{ A}$ se obține

$$P_d = 2 \times 0,1 \times 30^2 = 180 \text{ W}.$$

Comparînd între ele cele două puteri P și P_d se observă că au aceleași valori, ceea ce trebuia demonstrat.

E 4.5. Trei elemente galvanice identice, avînd fiecare tensiunea electromotoare $E_1 = 24 \text{ V}$ și rezistența interioară $r_1 = 0,45 \ \Omega$, sînt legate în paralel și alimentează un circuit exterior cu rezistența $R = 3,85 \ \Omega$.

Se cere să se calculeze intensitatea curentului care trece prin circuitul exterior și tensiunea la bornele bateriei.

(Institutul Petrol, Gaze și Geologie, subingineri, 1969).

Rezolvare. Pentru rezolvarea acestei probleme se folosește legea lui Ohm aplicată unui circuit care conține un generator de tensiune electromotoare E , rezistență interioară r și un rezistor R

$$I = \frac{E}{R + r}.$$

Deoarece generatoarele din problemă sînt grupate în paralel generatorul echivalent are tensiunea electromotoare $E = E_1 = 24 \text{ V}$ și rezistența interioară

$$r = \frac{r_1}{3} = \frac{0,45}{3} = 0,15.$$

Introducînd aceste valori în formulă și ținînd seama că $R = 3,85 \ \Omega$ se obține

$$I = \frac{24}{3,85 + 0,15} = 6 \text{ A}.$$

Pentru calculul tensiunii la bornele bateriei se poate scrie că aceasta este aceeași la bornele fiecărui element, respectiv

$$U = E_1 - r_1 i_1$$

în care

$$i_1 = \frac{I}{3} = \frac{6}{3} = 2 \text{ A.}$$

Rezultă

$$U = 24 - 0,45 \times 2 = 23,1 \text{ V.}$$

La același rezultat se ajunge scriind că tensiunea la bornele bateriei de elemente este aceeași cu cea de la bornele rezistorului respectiv

$$U = RI$$

Înlocuind $R = 3,85 \text{ } \Omega$ și $I = 6 \text{ A}$ se obține

$$U = 3,85 \times 6 = 23,1 \text{ V.}$$

4.3. Tipul al doilea: probleme care se rezolvă prin transpunerea directă a informațiilor din enunț

Acesta este un alt tip de problemă pentru a cărei rezolvare nu avem altceva de făcut decât să transpunem analitic, în mai multe ecuații, toate informațiile date în enunțul problemei, după care rezolvăm sistemul de ecuații astfel obținut și interpretăm rezultatele. În aceste probleme necunoscutele nu se obțin deci direct din aplicarea unei formule sau relații, ci din rezolvarea unui sistem de ecuații.

Scrierea acestora este mai ușoară când informațiile cuprinse în enunț sînt directe și mai dificilă când ele sînt indirecte (necuprinse direct în textul enunțului). În acest ultim caz este necesară mai întîi sesizarea acestora și apoi transpunerea lor în formule sau ecuații.

Acest tip de probleme solicită raționamentul pentru transpunerea corectă a informațiilor în formulele fizicii și la găsirea relațiilor geometrice necesare care să completeze numărul ecuațiilor furnizate de enunțul problemelor respective.

Cîteva exemple de calcul prezentate în continuare arată cum se rezolvă acest tip de probleme.

E 4.6. Două sfere neelastice de mase m_1 și m_2 se mișcă pe aceeași direcție și în același sens cu vitezele v_1 și v_2 . Ce raport există între masele lor dacă:

a) viteza de ciocnire este media aritmetică a vitezelor dinainte de ciocnire;

b) idem media geometrică;

c) idem media armonică? [15, 11/66].

Rezolvare. Folosim ecuația impulsului

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

care dă viteza comună a celor două bile după ciocnire

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

combinată cu transpunerea analitică a fiecăreia dintre cele trei informații din enunț

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad (2)$$

$$v = \sqrt{v_1 v_2} \quad (3)$$

$$v = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} \quad (4)$$

Problema se reduce deci la rezolvarea a trei sisteme de câte două ecuații fiecare avînd câte două necunoscute; rezultă:

— din (1) și (2):

$$\frac{m_2}{m_1} = 1$$

— din (1) și (3):

$$\frac{m_2}{m_1} = \sqrt{\frac{v_1}{v_2}}$$

— din (1) și (4):

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{v_1}{v_2}.$$

E 4.7. Un vas de formă conică, cu vîrful în jos, conține o oarecare cantitate de mercur la 0°C . La ce tempe-

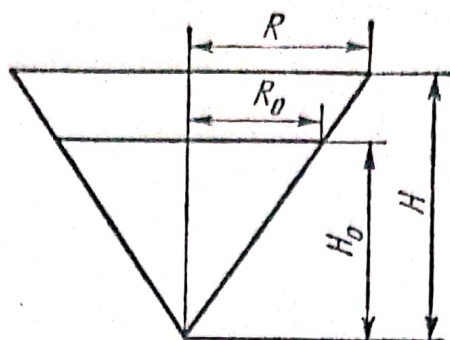


Fig. E 4.7

ratură trebuie încălzit vasul pentru ca nivelul mercurului din vas să crească cu $\lambda = \frac{1}{185}$ din înălțimea inițială?

Se dă coeficientul de dilatare absolută al mercurului

$$\gamma = \frac{1}{5550} \text{ grad}^{-1}. [7]$$

Rezolvare. Fie V_0 , R_0 , H_0 și V , R , H volumul, raza bazei conului și înălțimea acestuia la 0°C , respectiv la temperatura necunoscută $t^\circ\text{C}$. Fenomenul din enunț fiind o dilatare volumică vom folosi formula

$$V = V_0 (1 + \gamma t)$$

la care se adaugă relațiile geometrice evidente

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3} \quad \text{și} \quad V_0 = \frac{\pi R_0^2 H_0}{3}$$

cu care avem

$$\frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi R_0^2 H_0}{3} (1 + \gamma t)$$

sau

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \frac{H}{H_0} = 1 + \gamma t. \quad (1)$$

Informația de natură geometrică din enunț (nivelul — adică înălțimea H a mercurului din vas — crește cu λ din înălțimea inițială H_0) se traduce analitic astfel

$$H = H_0 + \lambda H_0 = (1 + \lambda) H_0, \quad \frac{H}{H_0} = 1 + \lambda \quad (2)$$

deci relația (1) devine

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 (1 + \lambda) = 1 + \gamma t. \quad (3)$$

Se impune deci aflarea raportului $\frac{R}{R_0}$; din asemănarea celor două triunghiuri dreptunghice din fig. E 4.7 ținând seama și de relația (2) rezultă

$$\frac{R}{R_0} = \frac{H}{H_0} = \lambda + 1$$

care, introdusă în relația (3), conduce la

$$(1 + \lambda)^3 = 1 + \gamma t$$

din care rezultă temperatura căutată

$$t = \frac{(1 + \lambda)^3 - 1}{\gamma}.$$

Introducând valorile numerice obținem

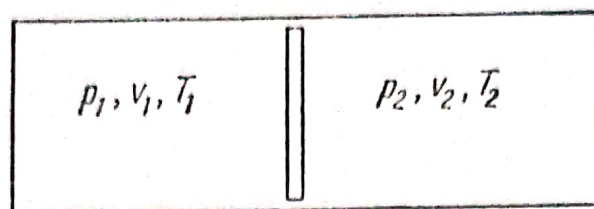
$$t = \frac{\left(1 + \frac{1}{185}\right)^3 - 1}{\frac{1}{5550}} = \frac{5550(186^3 - 185^3)}{185^3} = 90^\circ \text{C}.$$

Examinînd cu atenție calculele efectuate rezultă că la rezolvarea acestei probleme s-a folosit din fizică formula dilatării volumetrice, iar din geometrie formula volumului conului, o relație de asemănare și informația de natură geometrică dată în enunț.

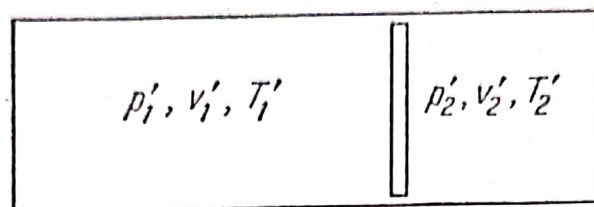
E 4.8. Un vas cilindric ce conține un gaz este împărțit de un piston în două compartimente. Presiunea și volumul gazului în fiecare compartiment sînt indicate în fig. E 4.8.

Temperatura inițială este aceeași în ambele compartimente. Se lasă apoi pistonul liber și se mărește de două ori temperatura compartimentului din stînga.

Se cere să se determine variația volumului gazului în compartimentul din stînga ca rezultat al acestei schimbări de temperatură [7].



a)



b)

Fig. E 4.8

Observații. a) Din enunțul acestei probleme lipsesc o serie de informații strict necesare rezolvării și anume:

- vasul cilindric este închis la ambele capete;
- din moment ce „se lasă apoi pistonul liber” înseamnă că inițial pistonul era fixat într-un fel oarecare, spre exemplu cu ajutorul unei tijă introdusă pe la una din extremitățile cilindrului, tijă care apoi este retrasă spre a lăsa pistonul liber;

- temperatura în compartimentul din dreapta rămîne aceeași.

Rezolvare. Notățiile indicate de figură și completate de noi cu temperaturile sînt:

Starea	Compartimentul	
	Stînga	Dreapta
I (fig. E 4.8, a)	p_1, v_1, T_1	p_2, v_2, T_2
II (fig. E 4.8, b)	p'_1, v'_1, T'_1	p'_2, v'_2, T'_2

Informațiile din problemă se transpun după cum urmează:

- temperatura inițială este aceeași în ambele compartimente

$$T_1 = T_2 \quad (1)$$

— pistonul era inițial fix

$$p_1 \neq p_2 \quad (2)$$

— pistonul este lăsat liber

$$p'_1 = p'_2 \quad (3)$$

— se mărește de două ori temperatura compartimentului din stînga

$$T'_1 = 2T_1 \quad (4)$$

— temperatura în compartimentul din dreapta rămîne aceeași

$$T'_2 = T_2 \quad (5)$$

— vasul cilindric este închis la ambele capete

$$v_1 + v_2 = v'_1 + v'_2 \quad (6)$$

— ecuația de stare pentru gazul din compartimentul din stînga

$$\frac{p'_1 v'_1}{T'_1} = \frac{p_1 v_1}{T_1} \quad (7)$$

— ecuația de stare pentru gazul din compartimentul din dreapta

$$\frac{p'_2 v'_2}{T'_2} = \frac{p_2 v_2}{T_2} \quad (8)$$

Se cere:

$$\Delta v_1 = v'_1 = v_1. \quad (9)$$

Se observă că nu am întîmpinat nici o dificultate în transpunerea analitică a tuturor informațiilor din problemă, inclusiv a întrebării. Este adevărat că a trebuit să adăugăm de la noi ecuațiile de stare bipoziționale ale celor două cantități de gaz, dar acest lucru se impunea de la sine, în enunț fiind vorba despre trecerea a două cantități de gaz dintr-o stare în alta.

Nu ne-a mai rămas acum altceva decît să prelucrăm toate cele opt relații obținute astfel încît să răspundem

întrebării puse în problemă. Aceasta este însă o operație de calcul care necesită ce-i drept o anumită abilitate, dar care iese însă din sfera preocupărilor fizicii.

O soluție ar fi evident aceea de a considera informațiile din problemă cu excepția primelor două ca un sistem de șase ecuații cu șase necunoscute: $p'_1, v'_1, T'_1, p'_2, v'_2, T'_2$, care, o dată aflate, răspunsul la întrebarea din problemă este imediat.

Aceasta este însă o soluție neeconomică, deoarece prin ea se determină nu numai mărimile cerute în problemă ci toate necunoscutele.

Soluția economică constă deci într-o rezolvare a ecuațiilor de mai sus astfel încât să obținem ceea ce se cere. Din (5) și (8) rezultă

$$p'_2 v'_2 = p_2 v_2. \quad (10)$$

Din (4) și (7)

$$p'_1 v'_1 = 2 p_1 v_1. \quad (11)$$

Împărțind între ele ultimele două relații și ținând seama de (3) se obține

$$\frac{v'_1}{v'_2} = 2 \frac{p_1 v_1}{p_2 v_2}. \quad (12)$$

Ecuațiile (6) și (12) alcătuiesc un sistem liniar de două ecuații cu două necunoscute: v'_1 și v'_2 . Eliminând pe v'_1 , care nu se cere și înlocuind din (9) pe v'_1 , ca să rezulte direct necunoscuta v_1 , obținem

$$v'_2 = v_1 + v_2 - v'_1, \quad v'_1 = \Delta v_1 + v_1$$

deci

$$v'_2 = v_1 + v_2 - \Delta v_1 - v_1 = v_2 - \Delta v_1$$

cu care relația (12) devine

$$\frac{\Delta v_1 + v_1}{v_2 - \Delta v_1} = 2 \frac{p_1 v_1}{p_2 v_2},$$

o ecuație liniară cu o singură necunoscută Δv_1 ; rezultă în final

$$\Delta v_1 = \frac{(2p_1 - p_2)v_1v_2}{p_2v_2 + 2p_1v_1}$$

din care se vede că $\Delta v_1 > 0$ dacă $p_1 > \frac{p_2}{2}$.

E 4.9. Un conductor rectiliniu și omogen, confecționat din aluminiu și străbătut de curent electric, se află într-un câmp magnetic omogen cu liniile de forță orizontale, perpendiculare pe conductor. Forța de interacțiune dintre curent și câmpul magnetic echilibrează greutatea conductorului. Dându-se: H — intensitatea câmpului magnetic, t — timpul cît trece curentul, d — densitatea aluminiului, ρ — rezistivitatea lui, c — căldura sa specifică, se cere să se determine variația temperaturii conductorului în timpul dat și să se arate că aceasta nu depinde de dimensiunile sale geometrice.

Aplicație numerică: $H = 4500$ A/m, $t = 39$ s; $d = 2700$ kg/m³; $\rho = 28 \cdot 10^{-9}$ $\Omega \cdot m$; $c = 910$ J/kg $\cdot$ grd. Se ia $g = \pi^2$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. [15,3/68]

Rezolvare. Informațiile ce trebuie transpuse în formule sînt următoarele: prima se referă la faptul că interacțiunea dintre conductorul parcurs de curent electric și câmpul magnetic se manifestă printr-o forță electrodinamică a cărei valoare este egală cu greutatea proprie a conductorului, ceea ce duce la relația

$$\mu H I l = mg$$

în care I este intensitatea curentului ce străbate conductorul, l este lungimea conductorului și m masa acestuia.

Cea de a doua informație se referă la faptul cunoscut că un conductor parcurs de curent electric se încălzește, încălzire care se exprimă prin egalitatea dintre cantitatea de căldură produsă de trecerea curentului prin conductor și cea primită de el

$$RI^2t = mc\Delta\theta$$

în care R este rezistența electrică a conductorului, $\Delta\theta$ — variația de temperatură a acestuia, iar t — timpul

în care curentul străbate conductorul. Din prima relație deducem

$$I = \frac{mg}{\mu H l}.$$

Introducând în cea de a doua obținem

$$\Delta\theta = R \frac{t}{mc} \frac{m^2 g^2}{\mu^2 H^2 l^2} = R \frac{t}{c} \frac{mg^2}{\mu^2 H^2 l^2}.$$

În această relație facem să apară dimensiunile geometrice ale conductorului, respectiv lungimea l și secțiunea conductorului S , care sînt cuprinse în expresia rezistenței

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

și a masei

$$m = l S d.$$

Introducând aceste mărimi în expresia lui θ obținem

$$\Delta\theta = \rho \frac{l}{S} \frac{t}{c} \frac{l S g^2}{\mu^2 H^2 l^2} = \rho \frac{t d g^2}{c \mu^2 H^2}.$$

Se vede că expresia lui $\Delta\theta$ nu conține dimensiunile conductorului, ceea ce trebuia arătat.

Calculul numeric conduce la

$$\Delta\theta = \frac{28 \times 10^{-9} \times 39 \times 2700 \times \pi^4}{910 \times (4\pi \cdot 10^{-7})^2 \times 4500^2} = \pi^2 {}^\circ\text{C}.$$

E 4.10. Care este turația unui motor continuu cu magneți permanenți conectat în circuitul unei surse cu tensiunea electromotoare E și rezistența totală R , știind că momentul mecanic rezistent pe care trebuie să-l învingă este M ?

Se știe că aceeași mașină, lucrînd ca generator, produce tensiunea electromotoare E_1 cînd turația sa este n_1 .
(Olimpiadă, U.R.S.S.).

Rezolvare. Prima informație furnizată de enunț este aceea că avem de-a face cu un circuit în care se află o sursă de tensiune electromotoare E , o rezistență

R și un motor electric ce posedă o tensiune contraelectromotoare E_c și o rezistență interioară inclusă în rezistența totală R , la fel ca și cea a generatorului de curent și a conductorilor de legătură.

În acest caz notînd cu I intensitatea curentului din circuit se poate scrie relația

$$E = E_c + RI. \quad (1)$$

A doua informație ce rezultă din problemă este aceea că atunci cînd mașina electrică din prima informație lucrează ca generator ea produce o tensiune electromotoare E_1 la turația n_1 . Această informație se transpune în relația

$$E_1 = kn_1 \quad (2)$$

unde k este o constantă a mașinii care se referă la construcția acesteia, la numărul de spire și la fluxul magnetic al cîmpului magnetic al sistemului, toate aceste mărimi fiind constante.

Pentru rezolvarea problemei trebuie scrise relațiile care exprimă mărimile din cele două informații în funcție de necunoscuta problemei, care este turația de lucru a motorului n .

Prima relație este cea care dă tensiunea contraelectromotoare a cărei expresie este asemenea celei scrise pentru cazul cînd mașina lucrează ca generator, respectiv

$$E_c = kn. \quad (3)$$

Cea de a doua relație care se poate scrie, și constituie o informație ascunsă a problemei, este egalitatea dintre puterea mecanică exprimată cu ajutorul mărimilor electrice pe de o parte, respectiv E_c și I și cu ajutorul mărimilor mecanice, pe de altă parte, respectiv M , n

$$E_c I = M \cdot 2\pi n. \quad (4)$$

Disponem de patru ecuații care conțin tot atîtea necunoscute, respectiv E_c , n , k , I . Deoarece nu ne interesează decît necunoscuta n , care este cerută în problemă, alegem acea metodă de calcul care ne con-

duce cît mai direct la determinarea acestei necunoscute, celelalte nefiind cerute în mod expres în enunțul problemei.

Din (2) și (3) rezultă

$$E_c = E_1 \frac{n}{n_1}. \quad (5)$$

Din (5) și (1) se obține

$$I = \frac{E - \frac{n}{n_1} E_1}{R}. \quad (6)$$

Introducînd (5) și (6) în (4) se obține

$$n = n_1 \frac{E}{E_1} - \frac{2\pi MR n_1^2}{E_1^2}$$

E 4.11. Un voltmetru V_1 conectat între două puncte A și B ale unui circuit de curent continuu indică o diferență de potențial de 100 V. Un alt voltmetru V_2 indică între aceleași puncte 102 V, iar al treilea voltmetru V_3 a cărui rezistență internă R_3 este infinită indică 104 V. Dacă se întrerupe circuitul între cele două puncte, voltmetrul al treilea indică 130 V. Se cere să se determine rezistența r a circuitului între cele două puncte, rezistența totală R a circuitului și rezistența voltmetrului al doilea R_2 , știind că primul voltmetru are rezistența $R_1 = 13 \text{ k}\Omega$.

(Univ. „A. I. Cuza”, Fac. Fizică, sept. 1970).

Rezolvare. Schema circuitului din enunț este arătată în fig. E 4.11.

Pe această schemă se vede că circuitul de rezistență totală R este alimentat de la o sursă de tensiune electromotoare E . Rezistența interioară a sursei este inclusă în rezistența totală a circuitului.

Dacă se notează cu U_1 indicația voltmetrului V_1 , cu U_2 cea a voltmetrului V_2 și cu U_3 respectiv U_3' indicațiile voltmetrului V_3 în circuitul închis, respectiv deschis și cu aceiași indici și exponenți intensitățile curenților

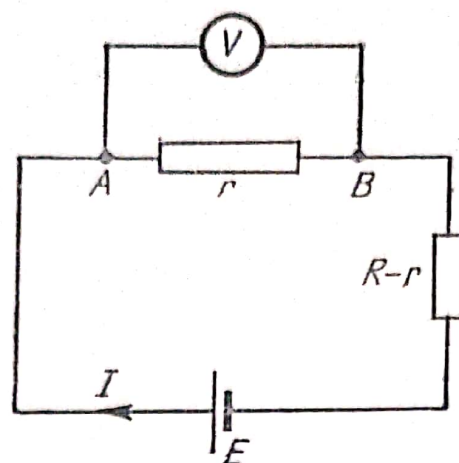


Fig. E. 4.11

din circuitul principal al schemei, cele cinci informații din enunțul problemei se traduc în următoarele egalități

$$U_1 = E - (R - r)I_1 \quad (1)$$

$$U_2 = E - (R - r)I_2 \quad (2)$$

$$U'_3 = E - (R - r)I'_3 \quad (3)$$

$$U''_3 = E - (R - r)I''_3. \quad (4)$$

Cea de a cincea informație este furnizată de precizarea că voltmetrul al treilea indică valoarea U''_3 când circuitul este întrerupt. Ea se traduce în relația

$$I''_3 = 0. \quad (5)$$

La aceste relații pot fi adăugate acelea ce decurg din legea lui Ohm aplicată circuitului din schemă în cele patru situații de măsurare a rezistenței r și anume

$$I_1 = \frac{E}{R - r + \frac{rR_1}{R_1 + r}} \quad (6)$$

$$I_2 = \frac{E}{R - r + \frac{rR_2}{R_2 + r}} \quad (7)$$

$$I'_3 = \frac{E}{R}. \quad (8)$$

Se obțin astfel opt ecuații care conțin opt necunoscute și anume: $E, R, r, R_2, I_1, I_2, I_3, I_3'$. Rezolvarea acestui sistem duce la găsirea valorilor necunoscutelor cerute în problemă, respectiv la R, r și R_2 .

Sistemul se rezolvă în modul următor: din (4) și (5) rezultă

$$U_3^* = E = 130 \text{ V.}$$

Din (3) și (8)

$$U_3' = E \left(1 - 1 + \frac{r}{R} \right) = E \frac{r}{R}, \text{ de unde } \frac{r}{R} = \frac{4}{5}. \quad (9)$$

Din (1) și (6)

$$\frac{U_1}{E} = 1 - \frac{R - r}{R - r + \frac{rR_1}{r + R_1}}. \quad (10)$$

Înlocuind pe r din (9) în (10) se obține

$$\begin{aligned} R &= \frac{5R_1}{4} \left(\frac{4E - 5U_1}{U_1} \right) = \\ &= \frac{5}{4} 13 \times 10^3 \frac{4 \times 130 - 5 \times 100}{100} = 3250 \text{ } \Omega. \end{aligned}$$

Din (9) rezultă

$$r = \frac{4}{5} 3250 = 2600 \text{ } \Omega.$$

R_2 se obține din aceeași relație (10) în care U_1 este U_2 , R_2 este R_1 și în care se înlocuiesc valorile găsite pentru R și r ; rezultă astfel

$$R_2 = 26520 \text{ } \Omega.$$

4.4. Tipul al treilea: probleme care se rezolvă cu ajutorul variantelor de formule

Rezultatele obținute în diferite capitole, ca urmare a unor demonstrații teoretice sau experimentale ce au la bază metodele fundamentale ale fizicii, exprimă sub

formă explicită sau implicită unele mărimi fizice ca funcție de altele. Spre exemplu, relația

$$a = g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

exprimă accelerația unui corp aruncat în sus pe linia de cea mai mare pantă a unui plan înclinat ca funcție de unghiul α al planului înclinat cu planul orizontal și de coeficientul de frecare μ dintre corp și plan, precum și de constanta universală g (accelerația gravitațională), adică

$$a = a(\alpha, \mu).$$

Nu se scrie

$$a = a(g, \alpha, \mu)$$

deoarece în diferite probleme pot varia numai α și μ , g rămânând același.

De asemenea, ecuația

$$pv = nRT$$

sau

$$pv - nRT = 0$$

exprimă relația dintre mărimile de stare ale unui gaz (p, v, T), numărul său de moli n și constanta universală a gazelor R ; ea se scrie

$$f(p, v, T) = 0$$

dacă n este constant.

Examinând fenomenele care se întâlnesc în fizică se găsesc o serie de legi care le guvernează; relațiile menționate mai sus nu reprezintă decât câteva exemple de exprimare *cantitativă* a acestor legi.

Se obține astfel un „stoc” de formule ale fizicii numite „clasice”, de care putem face uz la rezolvarea problemelor.

Evident, aceste formule ne sînt folositoare la rezolvarea unei probleme dacă problema respectivă a fost astfel formulată încît *toate* datele și necunoscutele ei să se afle într-o anumită formulă din „stocul” formulelor

„clasice“ (vezi tipul întâi de probleme). Aceste probleme au însă o rezolvare simplă, care se reduce cel mult la soluționarea unei ecuații cu o singură necunoscută.

Spre a spori gradul de dificultate al unei probleme ea poate fi astfel formulată încât datele nu se mai află într-o singură formulă „clasică“, ci în două sau chiar mai multe, care trebuie combinate între ele astfel încât să fie *eliminate* acele mărimi ce nu apar în enunțul problemei a cărei rezolvare se cere; prin acest procedeu se obțin noi formule care sînt combinații ale formulelor clasice, denumite de noi *variante de formule*.

O bună parte din problemele de fizică au la bază determinarea acestor formule noi, caracteristice fiecărei probleme în parte, fără de care soluționarea problemei respective nu este posibilă.

De remarcat că aceste formule se pot prezenta atît sub formă explicită cît și implicită. Acest tip de problemă prezintă un grad mai mare de dificultate, presupunînd o bună cunoaștere a relațiilor ce caracterizează un anumit fenomen precum și toate posibilitățile de definire a mărimilor derivate.

Cîteva exemple prezentate în cele ce urmează vor convinge de necesitatea luării în considerare a acestui tip de probleme.

E 4.12. Unui corp de masă m i se comunică impulsul H ; ce energie cinetică capătă acest corp?

Rezolvare. Răspunsul la această întrebare se află determinînd o variantă de formulă care exprimă energia cinetică a unui corp ca funcție de masa și impulsul său, avem

$$E = \frac{1}{2} mv^2; H = mv.$$

Eliminînd dintre ele viteza v care nu este dată în enunț obținem răspunsul căutat

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{H}{m} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{H^2}{m}.$$

E 4.13. Se cere să se calculeze randamentul unui plan înclinat de înălțime $h = 1,8$ m și bază $b = 4$ m, coeficientul de frecare avînd valoarea $\mu = 0,3$ [15,12/72].

Rezolvare. Formula randamentului planului înclinat este

$$\eta = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} = \eta(\alpha, \mu).$$

Nefiind dat unghiul α , ci dimensiunile b și h ale planului înclinat, rezultă că avem dat

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{b}$$

cu care liniile trigonometrice $\sin \alpha$ și $\cos \alpha$ de care avem nevoie în formula randamentului au valorile

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}}$$

și deci

$$\eta = \frac{h}{h + \mu b}.$$

Am obținut astfel o variantă de formulă a randamentului planului înclinat, care în loc de unghiul α al planului conține dimensiunile sale h și b : $\eta = \eta(h, b, \mu)$.

Pentru valorile numerice date rezultă

$$\eta = \frac{1,8}{1,8 + 0,3 \times 4} = \frac{1,8}{3} = 0,6 = 60\%.$$

E 4.14. Se cere să se determine randamentul unui plan înclinat cunoscând faptul că variația energiei potențiale a unei greutatei ce se deplasează între două puncte ale planului este de k ori mai mare decât lucrul mecanic efectuat de forța de frecare între aceleași poziții; ambele mărimi sînt considerate în valoare absolută.

Rezolvare. Observăm că, deoarece nu ni se dau nici un fel de informații cu privire la unghiul α de înclinare al planului și la coeficientul de frecare μ ,

va trebui să determinăm o variantă de formulă a planului înclinat ca funcție numai de k , adică $\eta = \eta(k)$. Considerând două puncte oarecare pe planul înclinat (0 și 1), distanțate între ele în lungul planului cu l și pe verticală cu h , avem

$$|L_{f0-1}| = \mu mgx \cos \alpha$$

$$\Delta\Pi_{0-1} = mgh = mgx \sin \alpha$$

deoarece

$$h = x \sin \alpha;$$

din enunț

$$\Delta\Pi_{0-1} = k |L_{f0-1}|$$

adică

$$\mu \cotg \alpha = k.$$

Înlocuind în formula randamentului

$$\eta = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} = \frac{1}{1 + \mu \cotg \alpha}$$

rezultă formula căutată

$$\eta = \frac{1}{1 + k}.$$

E 4.15. O bară prismatică de secțiune S , confecționată dintr-un material având masa specifică ρ , căldura specifică c și coeficientul de dilatare liniară α , absoarbe prin încălzire o cantitate de căldură Q . Se cere să se calculeze alungirea Δl a barei.

Rezolvare. Enunțul ne informează că trebuie să luăm în considerare două formule și anume:

— formula cantității de căldură primită de un corp prin încălzire

$$Q = mc\Delta t$$

— formula alungirii prin încălzire a unui corp

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta t.$$

Cum variația de temperatură Δt nu este dată în enunțul problemei, rezultă imediat că ea va trebui eliminată; obținem varianta de formulă

$$\Delta l = \frac{l_0 \alpha Q}{mc}.$$

Masa barei m și lungimea inițială l_0 nu sînt date; exprimăm masa ca funcție de ρ , S și l_0

$$m = \rho S l_0$$

cu care obținem în final

$$\Delta l = \frac{\alpha Q}{S \rho c}$$

ceea ce reprezintă o variantă de formulă a alungirii unei bare supuse încălzirii. Ca exemplu cităm problema 390 din lucrarea [7], unde $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $c = 0,46 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{grd}}$, $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ grd}$, $S = 24 \text{ cm}^2$ și $Q = 22 \text{ MJ}$. Rezultă

$$\Delta l \approx 3 \text{ cm}.$$

E 4.16. Se consideră două stări ale unei cantități de n moli de gaz caracterizate prin mărimile de stare (p_1 , v_1 , T_1) respectiv (p_2 , v_2 , T_2).

Se cunoaște formula „clasică” ce dă lucrul mecanic schimbat cu mediul exterior între aceste două stări

$$L_{12} = p_1 v_1 L \frac{v_2}{v_1}.$$

Se cere să se determine toate variantele posibile ale acestei formule în funcție de diferitele date ce pot apare în problemele în care intervine mărimea L_{12} .

Rezolvare. Observăm că trebuie să combinăm în toate modurile posibile formula dată cu următoarele:

— ecuația de stare a gazului în starea 1

$$p_1 v_1 = nRT$$

— ecuația de stare a gazului în starea 2

$$p_2 v_2 = nRT$$

— ecuația de legătură dintre mărimile de stare pe izoterma $T = \text{constant}$

$$p_1 v_1 = p_2 v_2$$

dedusă din cele două de mai sus, adică în concluzie cu relațiile

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 = nRT.$$

Rezultă deci:

$$\text{— date: } p_1, v_1, v_2 \implies L_{12} = p_1 v_1 L \frac{v_2}{v_1}$$

$$\text{— date: } v_1, v_2, p_2 \implies L_{12} = p_2 v_2 L \frac{v_2}{v_1}$$

$$\text{— date: } n, T, v_1, v_2 \implies L_{12} = nRT L \frac{v_2}{v_1}$$

$$\text{— date: } p_1, v_1, p_2 \implies L_{12} = p_1 v_1 L \frac{p_1}{p_2}$$

$$\text{— date: } p_1, p_2, v_2 \implies L_{12} = p_2 v_2 L \frac{p_1}{p_2}$$

$$\text{— date: } n, T, p_1, p_2 \implies L_{12} = nRT L \frac{p_1}{p_2}.$$

Iată deci șase variante distincte de formule care se folosesc după necesități la rezolvarea problemelor de transformări izotermice ale gazelor ideale.

Un exemplu în care formula-variantă căutată este o expresie implicită ce se prezintă sub forma unei ecuații de gradul al doilea din rezolvarea căreia rezultă mărimea cerută este prezentat în continuare.

E 4.17. Pentru ridicarea uniformă a unui corp de masă $m = 10 \text{ kg}$ pe un plan înclinat cu frecare, de coeficient $\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$, este necesară o forță $F = 100 \text{ N}$ orientată în lungul liniei de cea mai mare pantă a planului înclinat. Se cere să se calculeze randamentul acestui plan.

Rezolvare. Observăm că în enunțul problemei apar două mărimi ale căror formule ne sînt bine cunoscute:

— forța cu care este tras un corp în mișcare uniformă în lungul liniei de cea mai mare pantă a unui plan înclinat

$$F = mg (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \quad (1)$$

— randamentul unui plan înclinat

$$\eta = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}. \quad (2)$$

Prima întrebare care ne vine în minte este „Ce facem cu ele”? O nouă examinare a enunțului ne furnizează însă răspunsul: deoarece din textul problemei lipsește unghiul α rezultă în mod logic că va trebui să eliminăm acest unghi între cele două formule de mai sus; în acest fel vom obține o relație de forma

$$f(F, \eta, \mu, m) = 0$$

din care vom putea explicita *eventual* randamentul η adică vom obține

$$\eta = \eta(F, \mu, m).$$

Aceasta este o variantă de formulă a randamentului planului înclinat în care în locul mărimilor α și μ apar mărimile F , μ , m și g . Calculul decurge astfel:

— mai întîi eliminăm expresia $\sin \alpha + \mu \cos \alpha$; din (2) avem

$$\sin \alpha + \mu \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\eta}$$

care, introdusă în (1), conduce la

$$F = \frac{mg \sin \alpha}{\eta}$$

din care deducem

$$\sin \alpha = \frac{F\eta}{mg}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{mg} \sqrt{m^2 g^2 - F^2 \eta^2}.$$

— revenim cu valorile lui $\sin \alpha$ și $\cos \alpha$ astfel aflate în relația (2) și obținem

$$\eta = \frac{F\eta}{F\eta + \mu \sqrt{m^2 g^2 - F^2 \eta^2}}$$

simplificând cu $\eta (\eta \neq 0)$ rezultă

$$F = F\eta + \mu \sqrt{m^2 g^2 - F^2 \eta^2}$$

sau

$$F(1 - \eta) = \mu \sqrt{m^2 g^2 - F^2 \eta^2}.$$

Ridicând la pătrat și ordonând după puterile lui η obținem

$$(1 + \mu^2)\eta^2 - 2\eta - \left(\frac{\mu mg}{F}\right)^2 + 1 = 0$$

care constituie relația căutată; ea este o ecuație de gradul al doilea care, prin rezolvare și alegerea rădăcinii convenabile, conduce la soluția problemei

$$\eta_{1,2} = \frac{+1 \pm \frac{1}{F} \sqrt{\mu^2 m^2 g^2 (1 + \mu^2) - \mu^2 F^2}}{1 + \mu^2}.$$

Dintre aceste două rădăcini se păstrează rădăcina pozitivă subunitară.

Pentru datele numerice rezultă

$$\begin{aligned} \eta_{1,2} &= \frac{+1 \pm \frac{1}{100} \sqrt{\frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 10^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \cdot 10^4}}{1 + \frac{1}{3}} = \\ &= \frac{3 \pm 3 \sqrt{\frac{1}{9}}}{4}. \end{aligned}$$

Deoarece $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ se obține

$$\eta_1 = \frac{+3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ (rezultat inacceptabil)}$$

$$\eta_2 = \frac{+3-1}{4} = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ (rezultat corect).}$$

Se observă că la rezolvarea acestei probleme am făcut apel la o logică elementară, ghidați fiind de însuși enunțul problemei. Remarcăm de asemenea că relația $f(F, \eta, \mu, m, g) = 0$ nu a putut fi explicitată în raport cu F .

E 4.18. Dintr-un punct M situat pe un plan înclinat se mișcă fără frecare și fără viteză inițială în sens descendent un corp care trece prin punctul A cu viteza v_1 și apoi prin punctul B cu viteza v_2 .

Cunoscând media aritmetică $v_m = 2 \text{ m/s}$ a acestor două viteze, diferența de nivel dintre punctele A și B , $h = 0,5 \text{ m}$ și distanța $MA = 0,3 \text{ m}$ se cere să se determine ($g = 10 \text{ m/s}^2$):

- Vitezele mobilului în punctele A și B .
- Distanța AB [15].

Rezolvare. În problemă se cer variantele de formule

$$v_1 = v_1(h, v_m, MA)$$

$$v_2 = v_2(h, v_m, MA)$$

$$AB = AB(h, v_m, MA)$$

relații în care va interveni desigur și constanta universală g , dar în care nu trebuie să intervină unghiul α al planului înclinat, deoarece el nu este dat.

- Din enunț avem

$$\frac{v_1 + v_2}{2} = v_m. \quad (1)$$

Relația lui Toricelli

$$v_2^2 = v_1^2 + 2as$$

se scrie în cazul problemei

$$v_2^2 = v_1^2 + 2g \sin \alpha \cdot AB = v^2 + 2gh \quad (2)$$

$$(v_2 - v_1)(v_2 + v_1) = 2gh. \quad (3)$$

Ținând seama și de (1) rezultă următorul sistem de ecuații

$$v_1 + v_2 = 2v_m$$

$$v_2 - v_1 = \frac{gh}{v_m}$$

din care obținem

$$v_1 = v_m - \frac{gh}{2v_m} = 2 - \frac{10 \times 0,5}{2 \times 2} = 0,75 \text{ m/s}$$

$$v_2 = v_m + \frac{gh}{2v_m} = 2 + \frac{10 \times 0,5}{2 \times 2} = 3,25 \text{ m/s.}$$

b) Aplicînd relația lui Toricelli între perechile de puncte MA respectiv MB obținem

$$v_1^2 = 2g \cdot MA \sin \alpha; v_2^2 = 2g \cdot MB \sin \alpha.$$

Prin împărțire rezultă

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{MA}{MB}$$

sau, ținînd seama că MA este cunoscut și MB necunoscut,

$$\frac{v_1^2}{v_2^2 - v_1^2} = \frac{MA}{MB - MA} = \frac{MA}{AB}$$

de unde

$$\begin{aligned} AB &= \frac{v_1^2}{v_2^2 - v_1^2} \cdot \frac{1}{MA} = \frac{0,75^2}{3,25^2 - 0,75} \cdot \frac{1}{0,3} = \\ &= \frac{0,5625}{10,5625 - 0,5625} \cdot \frac{1}{0,3} = \frac{0,5625}{10 \times 0,3} = 0,1875 \text{ m.} \end{aligned}$$

E 4.19. Un corp este aruncat în susul unui plan înclinat, pe linia sa de cea mai mare pantă; el urcă pînă într-un punct unde viteza sa se anulează, după care coboară.

Cunoscînd faptul că la urcare accelerația sa este în valoare absolută $a_u = 7,5 \text{ m/s}^2$, iar la coborîre $a_c = 2,5 \text{ m/s}^2$ se cere să se calculeze ($g = 10 \text{ m/s}^2$):

- unghiul format de planul înclinat cu cel orizontal;
- coeficientul de frecare η dintre corp și plan.

(Admitere IPB, iulie 1973)

Rezolvare. Expresiile celor două accelerații menționate în enunțul problemei sînt

$$a_u = g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

$$a_c = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Pentru a răspunde la întrebările cerute vom determina două variante de formule considerînd aceste expresii ca un sistem de ecuații liniare cu necunoscutele α și μ ; prin adunare și scădere rezultă

$$\sin \alpha = \frac{a_u + a_c}{2g} = \frac{7,5 + 2,5}{2 \times 10} = 0,5; \quad \alpha = 30^\circ$$

$$\mu = \frac{a_u - a_c}{2g \cos \alpha} = \frac{7,5 - 2,5}{2 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0,28.$$

Ca verificare — deoarece corpul se duce și se întoarce — trebuie ca

$$\operatorname{tg} \alpha > \mu$$

ceea ce se întîmplă deoarece

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Observație. Este interesant de observat că structura relațiilor care dau valorile accelerațiilor este de asemenea natură încît permite eliminarea unghiului α fără aducerea lor la o singură linie ($\cos \alpha$ se reduce).

E 4.20. Se cere să se calculeze energia potențială Π acumulată de un arc de constantă elastică k ce este comprimat sau întins cu forța F .

Rezolvare. Se cere varianta de formulă

$$\Pi = \Pi (F, k)$$

Sînt cunoscute relațiile

$$F = kx \quad \text{și} \quad \Pi = \frac{kx^2}{2}$$

unde x reprezintă deformația arcului. Prin eliminarea deformației x între aceste două relații se obține varianta de formulă căutată

$$\Pi = \frac{F^2}{2k}$$

E 4.21. Un pendul indică exact timpul pe Pământ la 0°C . Ce temperatură trebuie să fie la înălțimea $h = nR$ ($n > 1$) măsurată de la suprafața Pământului (R — raza sa) ca pendulul să indice și în acest punct timpul exact? Coeficientul de dilatare liniară al barei pendulului este α . Se va ține seama de variația accelerației gravitaționale cu altitudinea. Se dau n și α .

Rezolvare. Se cere să se determine varianta de formulă $t = t(n, \alpha)$; trebuie cunoscute următoarele formule:

— formula perioadei pendulului la suprafața Pământului

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g_0}}$$

— formula perioadei pendulului la înălțimea h de la suprafața Pământului.

$$T_h = 2\pi \sqrt{\frac{l_t}{g_h}}$$

— formula dilatării liniare

$$l_t = l_0(1 + \alpha t)$$

— formula variației accelerației gravitaționale cu altitudinea

$$g_h = g_0 \frac{R^2}{(R + h)^2}.$$

Conform enunțului avem

$$T_0 = T_h.$$

Înlocuind în această ecuație toate relațiile de mai sus rezultă următoarea variantă de formulă

$$t = - \frac{n(n + 2)}{\alpha(n + 1)^2}.$$

E 4.22. O bară din oțel avînd lungimea $l = 1 \text{ m}$, de secțiune constantă, se răcește pierzînd $Q = 41850 \text{ J}$.

Se cere să se calculeze forța de întindere F care trebuie aplicată pentru ca bara să-și păstreze după răcire lungimea inițială. Se cunosc:

Modulul de elasticitate al materialului barei $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$

Coeficientul de dilatare liniară $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ grd}^{-1}$

Căldura specifică a materialului barei $c = 460 \text{ J/kg} \cdot \text{grd}$.

Densitatea materialului barei $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ [7].

Rezolvare. În problemă au loc două fenomene:

— răcirea barei,

— întinderea barei.

Primul fenomen are ca efect o scurtare $\Delta' l$ a barei, iar celălalt o alungire de valoare $\Delta'' l$.

Informația „bara să-și păstreze după răcire lungimea inițială” se traduce printr-o ecuație care exprimă egalitatea dintre scurtarea produsă de răcire și alungirea produsă de întindere, luate în valoare absolută adică

$$\Delta' l = \Delta'' l.$$

Făcînd apel la formulele corespunzătoare avem

$$l\alpha\Delta t = \frac{Fl}{SE}; \quad \alpha\Delta t = \frac{F}{SE} \quad (1)$$

Nefiind cunoscută variația de temperatură Δt dar în schimb cunoscînd cantitatea de căldură pierdută Q , mai facem apel și la formula cantității de căldură.

$$Q = mc\Delta t = \rho S l c \Delta t. \quad (2)$$

Eliminînd necunoscuta t între (1) și (2) rezultă

$$\Delta t = \frac{Q}{\rho S l c}; \quad \frac{\alpha Q}{\rho S l c} = \frac{F}{SE}; \quad \frac{\alpha Q}{\rho l c} = \frac{F}{E}$$

de unde rezultă varianta de formulă

$$F = \frac{E\alpha Q}{\rho l c} = \frac{2 \times 10^{11} \times 1,2 \times 10^{-5} \times 41850}{7800 \times 1 \times 460} =$$

$$= 28000 \text{ N} \approx 28 \text{ kN}.$$

E 4.23. O bară este încălzită de la temperatura t_1 la care are lungimea l_1 pînă la temperatura t_2 la care are lungimea necunoscută l_2 . Se cunoaște coeficientul de dilatare liniară α al materialului din care este confecționată bara.

Se cer lungimea l_2 , alungirea Δl și alungirea specifică ϵ a barei respective.

Rezolvare. Trebuie determinată o variantă de formulă care ne dă legătura între lungimile l_1 și l_2 ale aceleiași bare la temperaturile t_1 și t_2 ; din relațiile cunoscute

$$l_1 = l_0(1 + \alpha t_1), \quad l_2 = l_0(1 + \alpha t_2)$$

rezultă prin împărțire

$$l_2 = l_1 \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1}.$$

Tot din această relație ținînd seama că alungirea barei are expresia

$$\Delta l = l_2 - l_1$$

rezultă succesiv

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1} \Rightarrow \frac{l_2 - l_1}{l_1} = \frac{1 + \alpha t_2 - (1 + \alpha t_1)}{1 + \alpha t_1} = \frac{\alpha(t_2 - t_1)}{1 + \alpha t_1}$$

deci

$$\Delta l = l_1 \alpha \frac{t_2 - t_1}{1 + \alpha t_1}.$$

În fine

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_1} = \frac{t_2 - t_1}{1 + \alpha t_1} \alpha.$$

Aceste relații — nementionate de regulă în manuale — intervin într-o serie de aplicații.

E 4.24. Cunoscînd limitele de temperatură ($T_{\max} = T_1$ și $T_{\min} = T_2$) precum și lucrul mecanic L produs de o mașină ideală se cer valorile cantităților de căldură Q_1 (cedată sursei reci) și Q_2 (cedată sursei calde).

Aplicație: $T_1 = 150^\circ\text{C}$. $T_2 = 15^\circ\text{C}$, $L = 1 \text{ kWh}$. [16]

Rezolvare. Se cer două variante de formule care se obțin din formula randamentului mașinii ideale

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (1)$$

și din aplicarea principiului I al termodinamicii la un ciclu

$$L = Q = Q_1 - Q_2 \quad (2)$$

Din (1) rezultă, ținând seama de (2):

$$Q_1 = \frac{LT_1}{T_1 - T_2} = \frac{1 \times 423}{423 - 288} = \frac{423}{135} = 3,13 \text{ kWh}$$

$$\begin{aligned} Q_2 = Q_1 - L &= \frac{LT_1}{T_1 - T_2} - L = \frac{LT_2}{T_1 - T_2} = \frac{1 \times 288}{423 - 288} = \\ &= \frac{288}{135} = 2,13 \text{ kWh.} \end{aligned}$$

E 4.25. Se cere să se calculeze cantitatea de căldură Q primită de un gaz perfect într-o transformare izobară ($p = 5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$) dacă volumul gazului crește de la $v_1 = 50 \text{ dm}^3$ la $v_2 = 60 \text{ dm}^3$ și dacă variația de energie internă este $\Delta U = 7500 \text{ J}$. [16]

Rezolvare. Trebuie cunoscute două formule:

— formula variației energiei interne a unui gaz

$$\Delta U = Q - L$$

— formula lucrului mecanic de la transformarea izobară

$$L = p(v_2 - v_1).$$

Rezultă

$$\begin{aligned} Q = \Delta U + p(v_2 - v_1) &= 7500 + 5 \times 10^5 (60 - 50) \times 10^{-3} = \\ &= 7500 + 5000 = 12500 \text{ J} = 12,5 \text{ kJ.} \end{aligned}$$

E 4.26. Două rezistențe electrice $R_1 = 100 \Omega$ și R_2 sînt așezate în două vase, care conțin câte un lichid cu masele și căldurile specifice $m_1 = 200 \text{ g}$, $c_1 = 2512$

J/kg · grd și respectiv $m_2 = 400 \text{ g}$ și $c_2 = 1256 \text{ J/kg} \cdot \text{grd}$.

Cunoscând randamentul instalațiilor $\eta_1 = 80\%$ și $\eta_2 = 64\%$ se cere să se calculeze rezistența R_2 astfel ca ambele lichide să se încălzească cu un același număr de grade și în același timp, în următoarele cazuri:

- rezistențele sînt montate în serie;
- rezistențele sînt montate în paralel.

(Institutul Politehnic Cluj, 1964)

Rezolvare. În această problemă se va folosi relația ce dă cantitatea de căldură produsă de un conductor de rezistență R cînd este străbătut de un curent de intensitate dată I , într-un timp dat t , care este

$$Q = RI^2t. \quad (1)$$

Dacă se ține seama de faptul că

$$RI = U$$

unde U este căderea de tensiune la bornele rezistenței R , atunci relația de mai sus se poate scrie în următoarele două variante

$$Q = UIt \quad (2)$$

$$Q = \frac{U^2}{R} t. \quad (3)$$

Folosirea uneia din cele trei variante (1), (2) sau (3) se face în funcție de datele problemei.

În cazul problemei date cînd rezistențele sînt puse în serie deci sînt străbătute de același curent I_s , din informațiile furnizate de enunț rezultă relațiile

$$\eta_1 R_1 I_s^2 t = m_1 c_1 \Delta \theta$$

$$\eta_2 R_2 I_s^2 t = m_2 c_2 \Delta \theta$$

care exprimă egalitatea dintre cantitatea de căldură produsă de rezistențe și care, ținînd seama de randamentele instalațiilor este numai în parte absorbită de

lichidele ce se încălzesc cu aceeași temperatură $\Delta\theta$ în același timp t . Împărțind cele două relații găsim

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\eta_2 m_1 c_1}{\eta_1 m_2 c_2}$$

de unde

$$R_2 = R_1 \frac{\eta_1 m_1 c_1}{\eta_2 m_2 c_2} = 100 \frac{80}{64} \frac{0,4 \times 1256}{0,2 \times 2512} = 125 \Omega.$$

Cînd cele două rezistențe sînt montate în paralel, tensiunea la bornele rezistențelor R_1 și R_2 este aceeași, notată U ; aceleași informații se pot transpune în relațiile

$$\eta_1 \frac{U^2}{R_1} t = m_1 c_1 \Delta\theta$$

$$\eta_2 \frac{U^2}{R_2} t = m_2 c_2 \Delta\theta.$$

Prin aceeași operație de împărțire rezultă

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\eta_2 m_1 c_1}{\eta_1 m_2 c_2}$$

de unde

$$R_2 = R_1 \frac{\eta_2 m_1 c_1}{\eta_1 m_2 c_2} = 100 \frac{64}{80} \frac{0,2 \times 2512}{0,4 \times 1256} = 80 \Omega.$$

E 4.27. Un circuit electric conține un generator de curent continuu și o rezistență exterioară R_1 , randamentul electric al circuitului fiind $\eta_1 = 90\%$. Înlocuind rezistența R_1 cu altă rezistență R_2 , randamentul electric devine $\eta_2 = 80\%$. Se introduc ambele rezistențe în circuit. Se cere să se calculeze randamentul electric al circuitului dacă rezistențele sînt legate: a) în serie; b) în paralel.

Rezolvare. Randamentul electric al unui circuit este egal cu raportul dintre puterea electrică consumată P_c în rezistorul R_1 și cea produsă P_d de generatorul de curent de tensiune electromotoare E și rezistență interioară r , respectiv

$$\eta = \frac{P_c}{P_d}.$$

Dacă exprimăm puterea consumată prin una din variantele

$$P_c = RI^2 = UI = \frac{U^2}{R}$$

$$P_d = EI$$

se obțin trei variante ale formulei randamentului electric respectiv.

$$\eta = \frac{RI}{E} \quad (1)$$

$$\eta = \frac{U}{E} \quad (2)$$

$$\eta = \frac{U^2}{ERI}. \quad (3)$$

Aceste trei variante nu sînt însă singurele ce se pot scrie. Astfel, dacă înlocuim

$$I = \frac{E}{R + r}$$

obținem din prima variantă o altă formulă pentru randamentul electric și anume

$$\eta = \frac{R}{R + r} \quad (4)$$

variantă foarte des utilizată în rezolvarea problemelor.

Pentru rezolvarea problemei date cu ajutorul informațiilor din enunț se poate scrie că

$$\eta_1 = \frac{R_1}{R_1 + r} \quad \text{și} \quad \eta_2 = \frac{R_2}{R_2 + r}$$

din care rezultă

$$R_1 = \frac{\eta_1}{1 - \eta_1} r \quad \text{respectiv} \quad R_2 = \frac{\eta_2}{1 - \eta_2} r.$$

Pentru cazul cînd rezistențele R_1 și R_2 sînt puse în serie, randamentul electric al circuitului se obține folosind aceeași formulă (4), în care în locul lui R se

pune rezistența echivalentă a circuitului respectiv $R = R_1 + R_2$. Se obține astfel

$$\eta_s = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + r}.$$

Înlocuind în această relație pe R_1 și R_2 cu expresiile găsite funcție de randamentele η_1 , η_2 și de r se obține

$$\begin{aligned} \eta_s &= \frac{r \left(\frac{\eta_1}{1 - \eta_1} + \frac{\eta_2}{1 - \eta_2} \right)}{r \left(1 + \frac{\eta_1}{1 - \eta_1} \times \frac{\eta_2}{1 - \eta_2} \right)} = \frac{\eta_1 + \eta_2 - 2\eta_1\eta_2}{1 - \eta_1\eta_2} = \\ &= \frac{0,9 + 0,8 - 2 \times 0,9 \times 0,8}{1 - 0,9 \times 0,8} = 0,93 \end{aligned}$$

În același mod se procedează și atunci când rezistențele R_1 și R_2 sînt montate în paralel, în care caz în relația (4) se introduce în locul lui R rezistența echivalentă

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Randamentul circuitului este

$$\eta_p = \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + r} = \frac{1}{1 + r \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}.$$

Deoarece

$$\begin{aligned} r \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} &= \frac{r^2 \left(\frac{\eta_1}{1 - \eta_1} + \frac{\eta_2}{1 - \eta_2} \right)}{r^2 \frac{\eta_1 \eta_2}{(1 - \eta_1)(1 - \eta_2)}} = \frac{\eta_1 + \eta_2 - 2\eta_1\eta_2}{\eta_1\eta_2} = \\ &= \frac{0,9 + 0,8 - 2 \times 0,9 \times 0,8}{0,9 \times 0,8} = 0,3615 \end{aligned}$$

rezultă

$$\eta_p = \frac{1}{1 + 0,3615} = 0,734.$$

E 4.28. Se cere să se calculeze masa de cupru depusă de cei $9 \cdot 10^{20}$ ioni de cupru la catodul unui voltametru montat în circuitul unui generator de curent continuu.

Se cunosc: masa atomică a cuprului $A = 63,57$
 numărul lui Faraday $F = 96\,500 \text{ C}$
 sarcina electronului $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Rezolvare. Folosim relația cunoscută care dă masa de substanță m depusă la unul din electrozii unui voltametru și anume

$$m = \frac{1}{F} \frac{A}{n} It \quad (1)$$

în care n este valența elementului depus, I — intensitatea curentului din circuit, t — timpul cât trece curentul prin circuit, restul literelor din formulă avînd semnificația dată în enunț.

Deoarece în problemă nu se dau I , t și n , va trebui să alăturăm acestei formule o alta, care împreună cu ea să ducă la eliminarea acestor necunoscute; această nouă formulă este cea care dă cantitatea de electricitate Q ce trece prin soluție

$$Q = It = nNe \quad (2)$$

unde N este numărul de ioni ce trec prin soluție. Din aceste două formule rezultă următoarea variantă de formulă

$$m = \frac{1}{F} ANe$$

în care înlocuind valorile numerice din problemă se obține

$$m = \frac{63,57 \times 9 \times 10^{20} \times 1,6 \times 10^{-19}}{96500} = 0,094 \text{ g.}$$

4.5. Tipul al patrulea: probleme care se rezolvă prin aplicarea uneia sau mai multor metode

Problemele cu un grad mai mare de dificultate sînt acelea la care obținerea rezultatelor cerute se face prin aplicarea uneia sau mai multor metode, ocazie cu care

se obțin formule noi, diferite atât de cele clasice cât și de combinații ale acestora.

Aplicarea metodelor fizicii se face după programele corespunzătoare acestora. Desigur, în decursul calculelor apar și combinații între acest tip de probleme și tipurile anterioare; exemplele care urmează vor arăta și acest aspect.

Este ușor de observat faptul că între problemele de acest tip și cele precedente există o punte ușor de trecut. Într-adevăr, dacă cel ce rezolvă posedă un bagaj mai mare de cunoștințe, el nu mai are nevoie să aplice metodele fizicii pentru obținerea rezultatului ci aplică direct formula cunoscută; în acest caz problema respectivă poate fi categorisită în unul din tipurile precedente.

Pentru o categorie de probleme aceleași mărimi pot fi determinate prin aplicarea mai multor metode. Unele dintre aceste metode sînt mai ușor de aplicat și duc mai repede la rezultat pentru anumite cazuri, altele sînt mai ușor de aplicat pentru alte cazuri. În orice caz în măsura în care este posibilă aplicarea și a unei a doua metode, acest lucru se impune cel puțin pentru verificarea rezultatelor obținute printr-o primă metodă.

Evident că gradul de dificultate poate fi diferit pentru cele două metode și nu este recomandabilă verificarea unor rezultate prin aplicarea unei metode greoaie și dificile pentru cazul respectiv. Acolo însă unde este dificilă finalizarea printr-o a doua metodă se recomandă aplicarea acesteia pînă la etapa în care este posibilă încercarea soluțiilor găsite prin prima metodă.

Exemplele prezentate în continuare încearcă să ilustreze acest tip de probleme.

E 4.29. Două pietre sînt lansate pe verticală de jos în sus, din același punct, la un interval de timp $T = 2\text{s}$, prima cu o viteză inițială $v_{10} = 20\text{ m/s}$, iar cea de a doua cu viteza inițială $v_{20} = 25\text{ m/s}$. Se cere să se determine:

a) la ce distanță h față de punctul de plecare va avea loc întâlnirea și după cât timp t_1 de la plecarea primei pietre;

b) încotro se îndreaptă cele două pietre în momentul întâlnirii ($g = 10 \text{ m/s}^2$). [7]

Rezolvare. Se aplică metoda ecuațiilor de mișcare. Alegînd drept axă Ox verticala orientată în sus, originea coordonatelor în punctul comun de lansare a celor două pietre și originea timpului în momentul lansării primei pietre, ecuațiile de mișcare ale celor două pietre sînt

$$x_1 = -\frac{gt^2}{2} + v_{10}t$$

$$x_2 = -g \frac{(t-T)^2}{2} + v_{20}(t-T).$$

Vitezele celor două pietre se obțin prin derivarea celor două coordonate

$$v_1 = -gt + v_{10}$$

$$v_2 = -g(t-T) + v_{20}.$$

La întâlnirea lor, adică în momentul în care ceasul indică ora $t = t_1$, coordonatele sînt egale, adică:

pentru $t = t_1$ avem $x_1 = x_2$

Efectuînd înlocuirile obținem ecuația

$$-g \frac{t_1^2}{2} + v_{10}t_1 = -g \frac{(t_1 - T)^2}{2} + v_{20}(t_1 - T)$$

din care deducem valoarea orei de întâlnire

$$t_1 = \frac{gT^2 + 2v_{20}T}{2(v_{20} + gT - v_{10})} = 2,8 \text{ s.}$$

Coordonata punctului de întâlnire este dată de una din relațiile

$$h = x_1(t_1) = x_2(t_1).$$

Pentru verificare le calculăm pe amîndouă

$$h = x_1(t_1) = -g \frac{t_1^2}{2} + v_{10}t_1 = -\frac{10}{2} \times 2,8^2 + 20 \times 2,8 = 16,8 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} h = x_2(t_2) &= -g \frac{(t_1 - T)^2}{2} + v_{20}(t_1 - T) = \\ &= \frac{10}{2} (2,8 - 2)^2 + 25(2,8 - 2) = 16,8 \text{ m.} \end{aligned}$$

La cea de a doua întrebare răspunsul se capătă în modul următor.

În momentul întîlnirii ($t = t_1$):

- dacă $v_1(t_1) > 0$ prima piatră urcă
- dacă $v_1(t_1) < 0$ prima piatră coboară
- dacă $v_2(t_1) > 0$ cea de a doua piatră urcă
- dacă $v_2(t_1) < 0$ cea de a doua piatră coboară.

Justificarea acestui răspuns constă în aceea că dacă viteza mobilului este pozitivă aceasta înseamnă că ea este orientată în sensul ales al axei, adică, în cazul nostru, în sus și invers în caz contrar. Avem

$$v_1(t_1) = -gt_1 + v_{10} = -10 \times 2,8 + 20 = -8 \text{ m/s,}$$

deci prima piatră coboară în momentul întîlnirii;

$$\begin{aligned} v_2(t_1) &= -g(t_1 - T) + v_{20} = -10(2,8 - 2) + 25 = \\ &= +17 \text{ m/s,} \end{aligned}$$

deci cea de a doua piatră urcă în momentul întîlnirii.

Nu este nevoie deci de a determina intervalele de timp necesare urcării celor două pietre pînă la înălțimile lor maxime, pentru a observa încotro se îndreaptă fiecare dintre ele în momentul întîlnirii; metoda propusă rezolvă problema mult mai simplu.

La rezolvarea acestei probleme am folosit deci numai metoda ecuațiilor de mișcare.

E 4.30. Un corp este lansat fără viteză inițială dintr-un punct al unei traiectorii alcătuită din două sferturi de cerc de rază R situate în plan vertical și racordate astfel încît tangenta în punctul de racordare este orizontală.

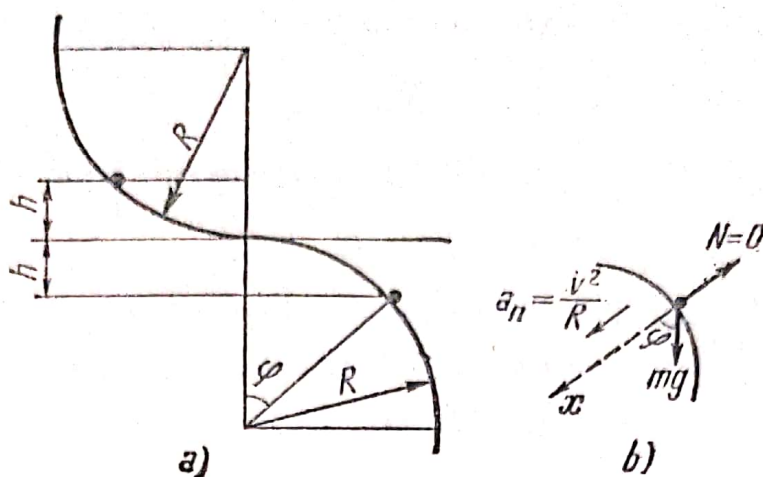


Fig. E 4.30

Neglijînd frecarea, se cere să se determine înălțimea h de la care trebuie lansat corpul fără viteză inițială deasupra tangentei comune pentru ca el să se desprindă pe arcul inferior într-un punct situat la aceeași distanță h de tangenta comună.

Rezolvare. Trebuie aplicate două din metodele fizicii:

— metoda ecuației $m\vec{a} = \vec{F}$, în proiecție pe normala la cercul inferior din punctul de desprindere, unde reacțiunea normală N este nulă (fig. E 4.30)

$$ma_n = F_n$$

adică

$$m \frac{v^2}{R} = mg \cos \varphi \quad (1)$$

unde φ este unghiul poziției de desprindere cu verticala;

— metoda energiei cinetice și lucrului mecanic între poziția inițială și cea de desprindere

$$E_1 = E_0 + L_{0-1}.$$

Ținînd seama că nu există frecare și că reacțiunea normală nu dă lucru mecanic, rezultă

$$\frac{1}{2} mv^2 = 0 + mg \cdot 2h. \quad (2)$$

Eliminând pe v^2 între (1) și (2) obținem

$$4h = R \cos \varphi.$$

Adăugînd acestui rezultat relația geometrică evidentă

$$R \cos \varphi = R - h.$$

Deoarece unghiul φ trebuie eliminat, întrucît nu este dat în problemă, rezultă, ținînd seama de relația (2)

$$4h = R - h$$

de unde

$$h = \frac{R}{5} = 0,2 R$$

care constituie rezultatul cerut. La rezolvarea acestei probleme am folosit deci două metode (metoda $m\bar{a} = \bar{F}$ și metoda energiei) precum și o relație geometrică.

E.4.31. Despre un mobil care se mișcă pe un plan înclinat se știe că într-o primă poziție are viteza nulă și energia potențială $\Pi = 196$ J, iar într-o a doua poziție, situată mai jos decît prima, are energia cinetică $E = 147$ J.

Se cere să se calculeze randamentul planului înclinat pe care se mișcă corpul.

Rezolvare. Observăm că problema este la prima vedere foarte dificilă: ne trebuie o variantă de formulă a randamentului planului înclinat care să conțină numai cele două date ale problemei, adică

$$\eta = \eta(E, \Pi).$$

Facem apel la singura formulă a randamentului planului înclinat pe care o cunoaștem

$$\eta(\alpha, \mu) = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}$$

și constatăm că nu cunoaștem nici unghiul α de înclinare al planului, nici coeficientul de frecare μ dintre corp și plan.

Fiind însă vorba în enunț despre energii, aplicăm metoda energiei între cele două poziții notate cu 0

(cea de sus) și 1 (cea de jos), și anume acea formă care conține energia cinetică și potențială.

$$\Delta E + \Delta \Pi = L_f$$

în care avem

$$\Delta E = E_1 - E_0 = E_1 = E; \quad \Delta \Pi = -mgh = \Pi$$

h fiind diferența de înălțime dintre prima poziție și cea de a doua, iar E și Π datele problemei. Mai avem

$$\begin{aligned} L_f &= -\mu mg \cos \alpha l = -\mu mg \cos \alpha \frac{h}{\sin \alpha} = \\ &= -\mu mgh \cotg \alpha, \end{aligned}$$

l fiind lungimea planului, cu care obținem

$$E - \Pi = -\mu mgh \cotg \alpha = -\mu \Pi \cotg \alpha.$$

De aici rezultă expresia coeficientului de frecare pe planul înclinat

$$\mu = \left(1 - \frac{E}{\Pi}\right) \tg \alpha$$

care *nu poate fi determinat* întrucât nu cunoaștem unghiul de înclinare al planului.

Înlocuind această valoare în formula randamentului constatăm însă că acest unghi dispare

$$\eta = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \left(1 - \frac{E}{\Pi}\right) \tg \alpha \cos \alpha} = \frac{\Pi}{2\Pi - E}$$

Aceasta este forma căutată; pentru datele numerice din enunț rezultă

$$\eta = \frac{196}{2 \times 196 - 147} = 0,8 = 80\%.$$

În concluzie, această problemă aparține tipului trei (deoarece s-a cerut o variantă de formulă) combinat cu tipul patru (deoarece pentru determinarea acestei

variante de formulă nu am combinat între ele formulele cunoscute, ci am folosit una din metodele fizicii).

E 4.32. Un arc de lungime l este fixat la un capăt. Agățând la capătul liber un corp de dimensiuni reduse, el se întinde, lungimea lui devenind de c ori mai mare decât lungimea inițială ($L = cl$). Se așază apoi arcul neîntins împreună cu corpul în poziție orizontală (fig. E 4.32); din această poziție i se dă drumul. Cu cât se va întinde arcul atunci când corpul trece pe sub punctul de suspensie? [7].

Rezolvare. Vom determina mai întâi constanta elastică a arcului; din informațiile problemei rezultă că în poziția de echilibru a arcului, când tensiunea din el T este egală cu greutatea masei atârnată, lungimea sa devine $L = cl$, deci alungirea sa este

$$\Delta l = L - l = l(c - 1).$$

Rezultă deci

$$T = k \Delta l = mg$$

de unde

$$k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{mg}{l(c - 1)}.$$

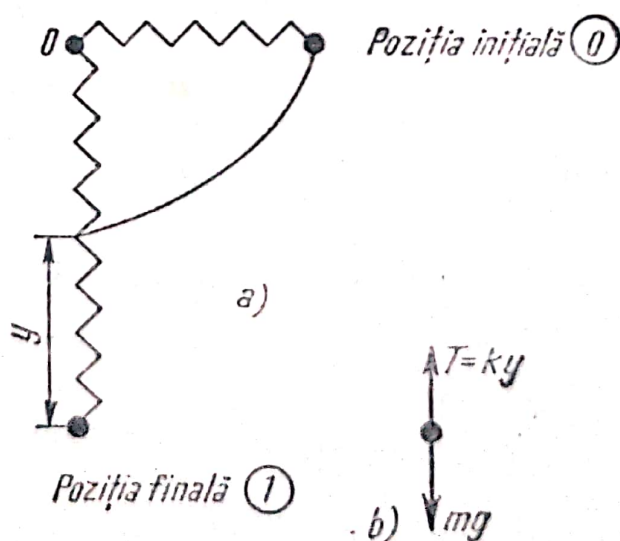


Fig. E 4.32

Considerînd cele două poziții inițială (0) și finală (1) și notînd cu y alungirea arcului în poziție verticală (fig. E 4.32) rezultă prin aplicarea metodei energiei

$$\Delta E + \Delta \Pi = 0$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - 0 + \frac{k y^2}{2} - mg(l + y) = 0 \quad (1)$$

deoarece energia potențială a arcului crește, în timp ce a greutateii scade.

Întrucît această ecuație conține două necunoscute (viteza corpului v_1 în poziția 1 și alungirea y a arcului în aceeași poziție) rezultă că mai trebuie aplicată încă o metodă.

Vom aplica pentru corpul de masă m metoda ecuației fundamentale în poziția 1, în proiecție pe verticală. În această poziție corpul este acționat de greutatea sa mg și de tensiunea $T = ky$ din arc și are accelerația

$$a = \frac{m v_1^2}{l + y}$$

orientată vertical către punctul de suspensie O . Avem

$$\frac{m v_1^2}{l + y} = ky - mg. \quad (2)$$

Eliminînd între (1) și (2) viteza v_1 necerută în problemă, obținem ecuația de gradul al doilea în y

$$2ky^2 + (kl - 3mg)y - 3mgl = 0 \quad (3)$$

cu soluțiile

$$y_{1,2} = \frac{-kl + 3mg \pm \sqrt{(kl - 3mg)^2 + 24 mgl}}{4k}.$$

Rezultă

$$y_{1,2} = \frac{3mg - kl \pm \sqrt{k^2 l^2 + 9m^2 g^2 + 18mgl}}{4k}.$$

Înlocuind în aceste soluții valoarea constantei k a arcului determinată mai sus obținem

$$y_{1,2} = l \frac{3c - 4 \pm \sqrt{9c^2 - 8}}{4}$$

rezultat valabil pentru

$$9c^2 - 8 > 0 \Rightarrow c \geq \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2,82}{3} = 0,94.$$

De fapt, trebuie ca $c \geq 1$, deoarece constanta elastică a arcului trebuie să rezulte pozitivă.

În cazul $c = 1$; $k \rightarrow \infty$ și obținem cazul pendulului matematic (fir rigid).

Astfel, pentru $c = 1$ (fir rigid) obținem

$$y_{1,2} = l \frac{3 - 4 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{-1 \pm 1}{4} l$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = -0,5 l$$

ultima soluție nefiind acceptabilă, deoarece în timpul mișcării arcul se alungește ($y > 0$), nu se scurtează ($y < 0$).

Se poate arăta că ecuația (3) are o rădăcină pozitivă și una negativă; într-adevăr, înlocuind valoarea constantei elastice rezultă ecuația

$$2y^2 + (4 - 3c)ly - 3l^2(c - 1) = 0$$

care pentru $c > 1$ are produsul rădăcinilor negativ; rădăcina care convine este cea pozitivă

$$y = l \frac{3c - 4 + \sqrt{9c^2 - 8}}{4}.$$

Observație. În lucrarea [7] această problemă este rezolvată neținându-se seama de variația energiei potențiale a arcului.

E 4.33. Un corp de masă m este lansat cu viteza v_0 pe o masă orizontală fără frecare. După parcurgerea unei anumite distanțe cu viteza constantă v_0 el întâlnește un arc de constantă elastică k , astfel încât viteza v_0 este coliniară cu axul arcului care are cealaltă extremitate fixă.

Se cere să se determine:

a) intervalul de timp care se scurge între momentul în care corpul ia contact cu arcul și momentul opririi sale;

b) deformația maximă a arcului;

c) tensiunea din arc în momentul opririi corpului (tensiunea maximă).

Rezolvare. a) Folosim mai întâi metoda ecuațiilor de mișcare. Din momentul în care corpul ia contact cu arcul și pînă se desprinde de acesta, corpul se mișcă după legea (3.31)

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \sin \left(\omega t + \arctg \frac{x_0 \omega}{v_0} \right)$$

în care

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Alegînd originea axei Ox în extremitatea liberă a arcului, sensul acesteia în sensul mișcării corpului și originea timpului în momentul în care corpul ia contact cu arcul, condițiile inițiale ale mișcării corpului sînt:

$$\text{la } t = 0 \text{ avem } x_0 = 0 \text{ și } v_0 = v_0$$

cu care legea de mișcare a corpului devine

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

și

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \omega t.$$

Condiția de oprire se exprimă astfel:

$$\text{pentru } t = t_1 \text{ (ora opririi) avem } v = 0.$$

Rezultă

$$0 = v_0 \cos \omega t_1$$

de unde

$$\omega t_1 = \frac{\pi}{2}, \quad t_1 = \frac{\pi}{2\omega}.$$

Același rezultat se obține și prin aplicarea metodei impulsului (3.18), între poziția inițială cînd corpul ia contact cu arcul și poziția finală, cînd corpul se oprește; rezultă

$$m(0 - v_0) = \int_0^{t_1} -kx \, dt.$$

Înlocuind valoarea lui x din legea de mișcare a greutateii rezultă

$$mv_0 = k \int_0^{t_1} x \, dt = \frac{k v_0}{\omega} \int_0^{t_1} \sin \omega t \, dt$$

sau

$$\frac{m\omega}{k} = - \frac{1}{\omega} \left| \cos \omega t \right|_0^{t_1}$$

din care se obține

$$\cos \omega t_1 = 1 - \frac{m\omega^2}{k} = 0 ; \left(\omega^2 = \frac{k}{m} \right)$$

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$$

adică același rezultat ca mai sus.

b) Pentru obținerea deformației maxime a arcului putem proceda ca la cinematică; astfel:

pentru $t = t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ avem $x = u$ (valoarea maximă a deformației).

Rezultă

$$u = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega \frac{\pi}{2\omega} = \frac{v_0}{\omega}.$$

Un alt procedeu constă în eliminarea timpului între expresia coordonatei și cea a vitezei; se obține

$$\sin \omega t = \frac{\omega x}{v_0}; \quad \cos \omega t = \frac{v}{v_0}$$

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$$

Rezultă în final

$$v = \sqrt{v_0^2 - \omega^2 x^2}$$

relație, care, particularizată pentru condițiile

$$x = u, \quad v = 0,$$

conduce la

$$u = \frac{v_0}{\omega}.$$

Prin aplicarea metodei energiei sub forma (3.16) se obține

$$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{k u^2}{2} = 0$$

sau

$$u = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{v_0}{\omega} \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$$

adică același rezultat ca mai sus.

c) Tensiunea din arc în momentul opririi corpului (tensiunea maximă) are valoarea

$$T_{max} = k u = k \frac{v_0}{\omega} = v_0 \sqrt{k m}.$$

E 4.34. Într-un vas cu apă ($\gamma_a = 1 \text{ t/m}^3$) și ulei ($\gamma_u = 0,9 \text{ t/m}^3$) se află un obiect de ceară ($\gamma_c = 0,96 \text{ t/m}^3$). Se cere să se determine cota parte din volumul de ceară care se află în apă și cea care se află în ulei.

Rezolvare. Corpul este acționat de trei forțe coliniare; greutatea sa, forța arhimedică a părții cufundate în apă și forța arhimedică a părții cufundate în ulei.

Fie x cota parte cufundată în apă și y cota parte cufundată în ulei; volumele părților din corp cufundate respectiv în apă și ulei sînt

$$v_a = xV; v_u = yV$$

unde V este volumul total al corpului

$$V = v_a + v_u = xV + yV$$

de unde

$$x + y = 1. \quad (1)$$

Scriind că cele două forțe arhimedice echilibrează greutatea întregului corp (metoda echilibrului aplicată unui sistem de forțe coliniare) obținem

$$\gamma_c V = \gamma_a v_a + \gamma_u v_u$$

sau

$$\gamma_c V = \gamma_a x V + \gamma_u y V$$

de unde

$$\gamma_c = \gamma_a x + \gamma_u y. \quad (2)$$

Ecuatiile (1) și (2) alcătuiesc un sistem cu necunoscutele x și y ; rezolvînd și înlocuind valorile numerice obținem

$$x = \frac{\gamma_c - \gamma_u}{\gamma_a - \gamma_u} = 0,6 = 60\%, \quad y = \frac{\gamma_a - \gamma_c}{\gamma_a - \gamma_u} = 0,4 = 40\%.$$

E 4.35. Un condensator plan cu armăturile așezate orizontal se află în vid; distanța dintre armături este $d = 0,01$ m. Pe placa inferioară se află o particulă de praf cu masa $m = 10^{-12}$ kg, care se încarcă cu o sarcină electrică. Pe armăturile condensatorului se aplică o diferență de potențial $U = 2000$ V, astfel ca potențialul mai mare să fie în legătură cu armătura inferioară. Prin această încărcare a condensatorului, particula de praf se va deplasa în sus. Se cere să se determine sarcina particulei, dacă ea ajunge la armătura superioară cu viteza $v = 0,2$ m/s și să se compare sarcina particulei de praf cu sarcina elementară.

Rezolvare. Folosind metoda energiei și metoda ecuației fundamentale a dinamicii rezultă succesiv

$$v = \sqrt{2ad} = \sqrt{2 \frac{F}{m} d} = \sqrt{2 \frac{Eq - mg}{m} d}$$

de unde rezultă sarcina electrică a particulei

$$\begin{aligned} q &= \left(\frac{v^2 m}{2d} + mg \right) \frac{1}{E} = \frac{m}{E} \left(\frac{v^2}{2d} + g \right) = \frac{m}{U} d \left(\frac{v^2}{2d} + g \right) = \\ &= \frac{10^{-12}}{2 \times 10^3} \times 0,01 \left(\frac{(0,2)^2}{2 \times 0,01} + 9,8 \right) = 5,9 \cdot 10^{-17} \text{C}. \end{aligned}$$

Comparînd această sarcină cu cea a electronului rezultă

$$\frac{q}{e} = \frac{5,9 \times 10^{-17}}{1,6 \times 10^{-19}} = 3,69 \times 10^2 = 369.$$

E 4.36. Un condensator plan este alcătuit din două armături dreptunghiulare avînd dimensiunile 20×10 cm, aflate la distanța de 5 mm una de alta. Între armături este vid. Știînd că diferența de potențial armături dintre armături este de 1000 V, se cere:

a) cantitatea de electricitate cu care este încărcat condensatorul;

b) forța ce acționează asupra unui electron ce se găsește între cele două armături;

c) lucrul mecanic efectuat de electron cînd se deplasează de la armătura negativă la cea pozitivă;

d) viteza electronului în momentul cînd ajunge pe armătura pozitivă, considerîndu-se că pleacă de la armătura negativă fără viteză inițială. Se dau: $\epsilon_0 = 8,856 \cdot 10^{-12}$ F/m, sarcina electrică a electronului $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; masa electronului $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg. [15,1/68].

Rezolvare. Avem succesiv:

a) Capacitatea condensatorului

$$C = \frac{\epsilon S}{d} = \frac{8,856 \times 10^{-12} \times 2 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-3}} = 3,542 \times 10^{-11} \text{ F.}$$

Cantitatea de electricitate cu care este încărcat condensatorul

$$Q = C(V_A - V_B) = 3,542 \times 10^{-11} \times 10^3 = 3,542 \times 10^{-8} \text{ C.}$$

b) Forța ce acționează asupra unui electron care se găsește între armăturile condensatorului

$$\begin{aligned} F &= Eq = \frac{V_A - V_B}{d} e = \\ &= \frac{10^3}{5 \times 10^{-3}} 1,6 \times 10^{-19} = 3,2 \times 10^{-14} \text{ N.} \end{aligned}$$

c) Lucrul mecanic efectuat de electron între cele două armături

$$W = qU = eU = 1,6 \times 10^{-19} \times 10^3 = 1,6 \times 10^{-16} \text{ J.}$$

d) Folosind metoda energiei și a ecuației fundamentale a dinamicii rezultă

$$v = \sqrt{2ad} = \sqrt{2 \frac{F}{m} d} = \sqrt{2 \times \frac{3,2 \times 10^{-14}}{9,1 \times 10^{-31}} 5 \times 10^{-3}} = 1,87 \times 10^7 \text{ m/s} = 18\,700 \text{ km/s.}$$

E 4.37. Fie puntea Wheatstone din figura E 4.37, a la care se dau valorile numerice

$$R_1 = R_4 = R_5 = 10 \, \Omega, \quad R_2 = R_6 = 5 \, \Omega, \\ R_3 = 17,5 \, \Omega \text{ și } E = 100 \text{ V.}$$

Se cere să se rezolve circuitul din fig. E 4.37 aplicând metoda curenților ciclici. Să se verifice rezultatul cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff. [15, 1/73].

Rezolvare. Pentru aplicarea metodei curenților ciclici se alege ca sens arbitrar al acestor curenți i_1 ,

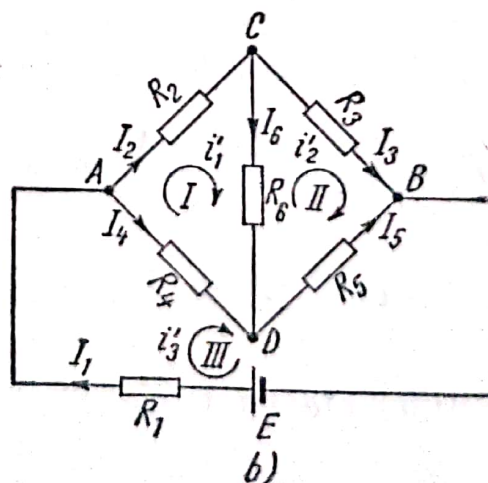
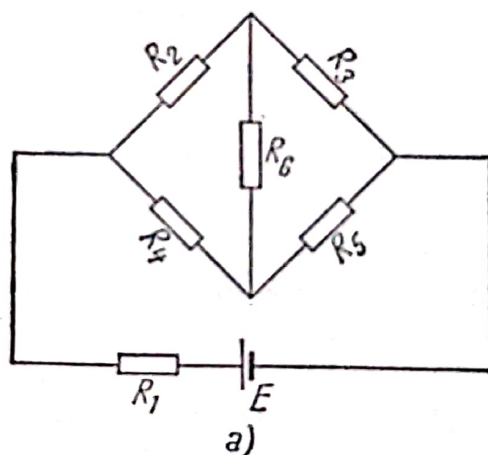


Fig. E 4.37

i_2'' și i_3'' în cele trei ochiuri ale rețelei sensurile din figura 4.37, b. Se obține sistemul de ecuații:

$$(I) \quad (R_2 + R_6 + R_4)i_1'' - R_4i_3'' - R_6i_2'' = 0$$

$$(II) \quad -R_6i_1'' + (R_3 + R_5 + R_6)i_2'' - R_5i_3'' = 0$$

$$(III) \quad -R_4i_1'' - R_5i_2'' + (R_1 + R_4 + R_5)i_3'' = E.$$

Înlocuind valorile numerice și făcând simplificările ce se impun se obține sistemul

$$4i_1'' - i_2'' - 2i_3'' = 0 \quad (1)$$

$$2i_1'' - 13i_2'' + 4i_3'' = 0 \quad (2)$$

$$i_1'' + i_2'' - 3i_3'' = -10 \quad (3)$$

Din (1) și (2) se obține, reducând pe i_3'' , ecuația

$$10i_1'' - 15i_2'' = 0. \quad (4)$$

Tot din (1) și (2) se obține

$$3i_3'' = i_1'' + 6i_2'' \quad (5)$$

care introdusă în (3) dă

$$5i_2'' = 10 \quad (6)$$

din care rezultă

$$i_2'' = 2 \text{ A}$$

Din (4) rezultă $i_1'' = \frac{3}{2} i_2'' = 3 \text{ A}$, iar din (5) rezultă $i_3'' = 5 \text{ A}$.

Curenții din laturile circuitului sînt

$$I_1 = i_3'' = 5 \text{ A}, \quad I_4 = i_3'' - i_1'' = 5 - 3 = 2 \text{ A}$$

$$I_2 = i_1'' = 3 \text{ A}, \quad I_5 = i_3'' - i_2'' = 5 - 2 = 3 \text{ A}$$

$$I_3 = i_2'' = 2 \text{ A}, \quad I_6 = i_1'' - i_2'' = 3 - 2 = 1 \text{ A}.$$

Pentru aplicarea metodei teoremelor lui Kirchhoff, se aleg pentru rețeaua dată, aceleași sensuri pentru curenții $I_1, \dots, I_6$ și aceleași sensuri de parcurs cu

cele ale curenților ciclici i'_1 , i'_2 și i'_3 în cele trei ochiuri I , II și III ; rezultă sistemul de ecuații.

$$(A) \quad I_1 = I_2 + I_4; \quad (I) \quad R_2 I_2 + R_6 I_6 - R_4 I_4 = 0$$

$$(C) \quad I_2 = I_3 + I_6; \quad (II) \quad R_3 I_3 - R_5 I_5 - R_6 I_6 = 0$$

$$(D) \quad I_5 = I_6 + I_4; \quad (III) \quad R_1 I_1 + R_4 I_4 + R_5 I_5 = E.$$

Înlocuind datele numerice, sistemul de ecuații devine

$$I_1 = I_2 + I_4 \quad (1) \quad I_2 + I_6 - 2I_4 = 0 \quad (4)$$

$$I_2 = I_3 + I_6 \quad (2) \quad I_3 - 4I_5 - 2I_6 = 0 \quad (5)$$

$$I_5 = I_6 + I_4 \quad (3) \quad I_1 + I_4 + I_5 = 10. \quad (6)$$

Din rezolvarea acestui sistem rezultă aceleași soluții ca mai înainte.

Comparînd cele două metode rezultă că pentru acest caz aplicarea metodei curenților ciclici este mult mai comodă, deoarece ea conduce la rezolvarea unui sistem de numai trei ecuații cu trei necunoscute. Din aplicarea teoremelor lui Kirchhoff rezultă un sistem de șase ecuații cu șase necunoscute, mai dificil de rezolvat, care comportă un volum mai mare de muncă și mai multe posibilități de a greși.

În acest caz aplicarea metodei teoremelor lui Kirchhoff poate fi folosită pentru verificarea exactității soluțiilor găsite prin metoda curenților ciclici. Pentru aceasta este suficientă scrierea relațiilor și verificarea în aceste relații a soluțiilor găsite prin metoda curenților ciclici.

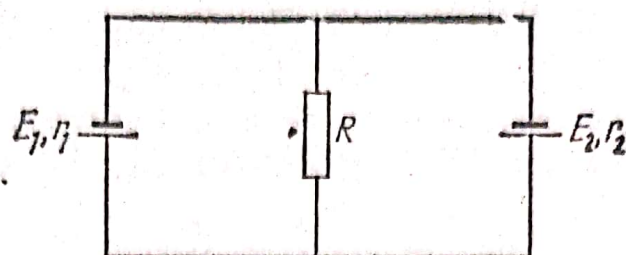
E 4.38. Se cere să se determine intensitatea curențului electric și puterea în fiecare ramură a circuitului din figura E 4.28, a în care $E_1 = 130 \text{ V}$, $E_2 = 117 \text{ V}$, $r_1 = 1 \Omega$, $r_2 = 0,6 \Omega$ și $R = 24 \Omega$.

(I.P.G.G., Foraj, ingineri, iulie 1970)

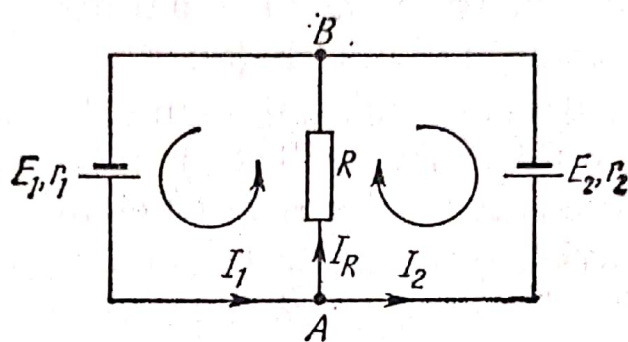
Rezolvare. Se aplică teoremele lui Kirchhoff. Circuitul considerat are trei laturi și două noduri. Se aleg sensurile intensităților curenților prin laturi și sensul de parcurs al ochiurilor ca în figura E 4.38, b.

Se aplică prima teoremă a lui Kirchhoff în nodul A ; rezultă

$$I_1 = I_2 + I_R.$$



a)



b)

Fig. E 4.38

Se aplică cea de a doua teoremă a lui Kirchhoff în cele două ochiuri; rezultă astfel încă două relații și anume

$$E_1 = RI_R + r_1 I_1$$

$$E_2 = RI_R - r_2 I_2.$$

Introducând valorile din enunț rezultă sistemul de ecuații

$$I_1 = I_2 + I_R \quad (1)$$

$$130 = 24 I_R + I_1 \quad (2)$$

$$117 = 24 I_R - 0,6 I_2. \quad (3)$$

Rezolvarea sistemului conduce la următoarele soluții

$$I_1 = 10 \text{ A}; I_2 = 5 \text{ A}; I_R = 5 \text{ A}.$$

Puterile din fiecare ramură au valorile

$$(E_1 - r_1 I_1) I_1 = (130 - 1 \times 10) 10 = 1200 \text{ W}$$

$$(E_2 + r_2 I_2) I_2 = (117 + 0,6 \times 5) 5 = 600 \text{ W}$$

$$R_2 I_2 = 24 \times 5 = 600 \text{ W}.$$

La aceleași relații (1), (2), (3) se ajunge scriind căderea de tensiune între punctele A și B pentru toate cele trei laturi ale circuitului și aplicând pentru laturile extreme legea lui Ohm generalizată. Se obțin astfel ecuațiile

$$E_1 - r_1 I_1 = R I_R = E_2 + r_2 I_2.$$

Egalînd prima ecuație cu a doua și a doua cu a treia, se obțin ecuațiile (1), (2) și (3).

E 4.39. Se dă circuitul din figura E 4.39 unde se cunosc $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 8 \Omega$ și $R_3 = 2 \Omega$. Sursa este o baterie alcătuită din $n = 10$ elemente legate în serie, fiecare avînd o rezistență $r_1 = 0,2 \Omega$ și o tensiune electromotoare $E_1 = 2 \text{ V}$. Se cere să se calculeze:

- curentul prin circuitul principal;
- tensiunea la bornele sursei;
- tensiunea la bornele fiecărei rezistențe;
- după ce timp energia produsă de sursă este $54 \cdot 10^3 \text{ J}$?

(Institutul Politehnic, Brașov, 1963)

Rezolvare. Pentru primele două puncte ale problemei se poate aplica metoda reducerii circuitului la circuitul cel mai simplu, avînd o rezistență exterioară egală cu rezistența echivalentă a rezistoarelor din circuit și o sursă de tensiune electromotoare E și rezistență interioară r .

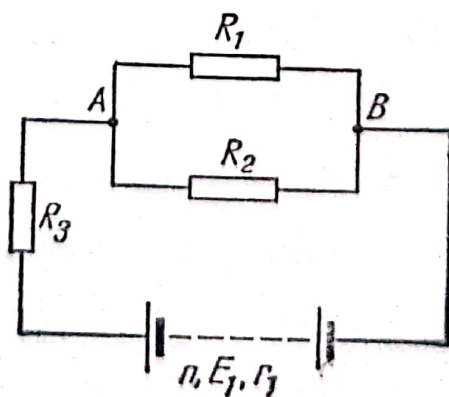


Fig. E 4.39

Valorile mărimilor R , E și r din circuitul echivalent sînt

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = \frac{8 \times 6}{8 + 6} + 2 = 5,43 \, \Omega$$

$$E = nE_1 = 10 \times 2 = 20 \, \text{V}$$

$$r = nr_1 = 10 \times 0,2 = 2 \, \Omega.$$

Cu acestea primele două puncte ale problemei se rezolvă imediat

$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{20}{5,43 + 2} = 2,7 \, \text{A}$$

$$U = E - rI = 20 - 2 \times 2,7 = 14,6 \, \text{V}.$$

Pentru punctul c) al problemei se obține

$$U_3 = R_3 I = 2 \times 2,7 = 5,4 \, \text{V}$$

$$U_{AB} = RI = 43 \times 2,7 = 9,27 \, \text{V}.$$

Punctul d) se rezolvă scriind egalitatea

$$Q = UIt$$

de unde rezultă

$$t = \frac{Q}{UI} = \frac{54 \times 10^3}{14,6 \times 2,7} = 1370 \, \text{s}.$$

4.6. Tipul al cincilea: probleme cu structură complexă

Acestea sînt problemele cele mai prezente la diverse concursuri sau examene, prin care candidatul trebuie să dovedească că poate acoperi toată gama de dificultăți ridicate de o problemă, respectiv că cunoaște fenomenele, legile, relațiile de calcul, că face raționamente logice și că stăpînește metodele de calcul necesare rezolvării acestora.

În general asemenea probleme necesită scheme, conțin în enunțarea lor informații din mai multe capitole ale fizicii și au mai multe puncte de rezolvat.

Aceste probleme constituie etapa finală de pregătire a unui candidat, o verificare a cunoștințelor lui în totalitatea lor, atît a celor din fizică cît și a celor din matematică.

Acest tip de probleme se apropie de cele întâlnite în practică, unde fenomenele fizice nu sînt izolate unul de celălalt, unde diversele capitole din fizică se leagă între ele. Se realizează astfel legarea cunoștințelor teoretice de posibilitatea aplicării lor practice.

În cele ce urmează sînt prezentate cîteva asemenea probleme împreună cu modul lor de rezolvare, din care rezultă cele spuse mai înainte.

E 4.40. Un corp de masă $3,6 \cdot 10^{-2}$ kg și dimensiuni neglijabile este suspendat de un fir de mătase și încărcat cu o sarcină electrică de $6,7 \cdot 10^{-8}$ C. De el se apropie — pe orizontală — o sferă de rază $6,7 \cdot 10^{-2}$ metri cu sarcina electrică de $9,86 \cdot 10^{-6}$ C. La o anumită distanță, sub acțiunea forțelor de respingere, direcția firului cu verticala face un unghi de $3^\circ 50'$. În acest moment sfera este pusă în legătură cu pămîntul și se neutralizează, iar corpul începe să oscileze cu perioada de 1 secundă. Se cere să se calculeze la ce depărtare se găsește corpul sferic de poziția inițială a pendulului (se ia $g = 9,86$ m/s²). [15]

Rezolvare. Date:

$$m = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ kg}; \quad Q = 9,86 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$q = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ C}; \quad \alpha = 3^\circ 50'; \quad g = 9,86 \text{ m/s}^2$$

$$r = 6,7 \cdot 10^{-2} \text{ m}; \quad T = 1 \text{ s.}$$

Din informațiile furnizate de enunț se pot scrie o serie de relații a căror exprimare este prezentată în cele ce urmează.

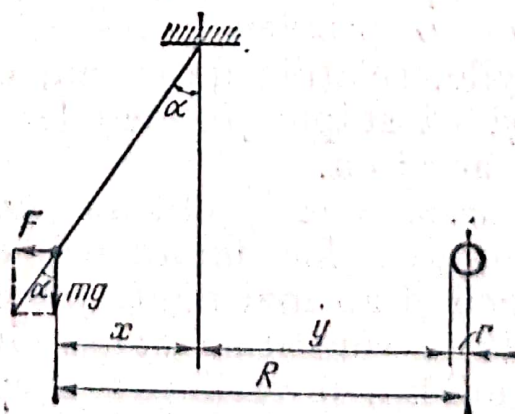


Fig. E 4.40

În momentul punerii sursei punctiforme în legătură cu pământul poziția ei față de verticală este dată de

$$x = l \sin \alpha \approx l\alpha, \quad (1)$$

deoarece unghiul α este mic.

Relația ce dă perioada de oscilație a pendulului este

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2)$$

Forța de respingere dintre cele două sarcini este

$$F = 9 \times 10^9 \frac{Qq}{\epsilon_r R^2} \quad (3)$$

Condiția de echilibru a sursei punctiforme este

$$F = mg \quad g \alpha = mg \alpha. \quad (4)$$

Eliminînd pe l între (1) și (2) rezultă

$$\begin{aligned} x &= \frac{T^2 g}{4\pi^2} \alpha = \frac{\pi^2 \alpha}{4\pi^2} = 0,25 \times 6,7 \times 10^{-2} = \\ &= 1,67 \times 10^{-2} \text{ m} \quad (g \approx \pi^2). \end{aligned}$$

Egalînd (3) și (4) se obține

$$mg \alpha = 9 \times 10^9 \frac{Qq}{\epsilon_r R^2}$$

de unde

$$\begin{aligned} R &= 3 \sqrt{\frac{10^9 Qq}{mg \epsilon_r \alpha}} = 3 \sqrt{\frac{10^9 \times 9,86 \times 10^{-6} \times 6,7 \times 10^{-8}}{3,6 \times 10^{-2} \times 9,86 \times 1 \times 6,7 \times 10^{-2}}} = \\ &= 0,5 \text{ m}. \end{aligned}$$

Distanța la care se găsește sfera de poziția inițială (verticală) a pendulului este

$$y = R - x - r = 0,5 - 0,0167 - 0,067 = 0,4316 \text{ m}$$

E 4.41. Tensiunea electromotoare a unui element este $E = 1,4 \text{ V}$. Rezistența circuitului exterior conectat la bornele elementului este $R = 10 \Omega$, iar rezistența interioară a elementului este $r = 4 \Omega$.

Se cere să se afle:

a) Care este tensiunea la bornele elementului și intensitatea curentului?

b) Ce rezistență exterioară trebuie montată în circuit pentru a se obține același curent în cazul folosirii ca sursă a două elemente identice: legate în serie; legate în paralel?

c) Câtă apă se poate încălzi de la 5°C, la 50°C, într-o oră, în cele trei cazuri?

(Institutul Politehnic, Timișoara, ingineri, iulie, 1970)

Rezolvare. Pentru punctul a) al problemei se aplică relațiile cunoscute pentru calculul intensității curentului din circuit și al căderii de tensiune la bornele rezistenței exterioare R la circuitul cel mai simplu conținând o sursă de tensiune electromotoare E și rezistența interioară r . Se obține astfel

$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{1,4}{10 + 4} = 0,1 \text{ A}$$

$$U = RI = 10 \times 0,1 = 1 \text{ V.}$$

La punctul b), pentru cazul când sursele sînt legate în serie, se reduce circuitul din enunț la un circuit echivalent simplu, a cărui sursă are tensiunea electromotoare $E_s = 2E$, rezistența interioară $r_s = 2r$ și o rezistență interioară de valoare necunoscută R_x .

Intensitatea curentului din circuitul principal este aceeași (I) și se determină din relația

$$I = \frac{E_s}{R_x + r_s}$$

de unde rezultă

$$R_x = \frac{E_s}{I} - r_s = \frac{2 \times 1,4}{0,1} - 2 \times 4 = 20 \Omega.$$

Cînd sursele sînt cuplate în paralel se procedează la fel; în circuitul simplu tensiunea electromotoare a

sursei este $E_p = E$, iar rezistența interioară este $r_p = \frac{r}{2}$; rezultă valoarea rezistenței R'_x

$$R'_x = \frac{E_p}{I} - r_p = \frac{1,4}{0,1} - 2 = 12 \Omega.$$

Pentru punctul c) se scrie egalitatea dintre cantitățile de căldură produse de rezistențele din circuitul exterior și cantitatea de căldură primită de apă și se calculează masele de apă respective; rezultă astfel

$$m = \frac{RI^2t}{c\Delta\theta} = \frac{10 \times 10^{-2} \times 3600}{4180 \times 45} = 1,91 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

$$m_x = \frac{R_x I^2 t}{c\Delta\theta} = \frac{20 \times 10^{-2} \times 3600}{4180 \times 45} = 3,82 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

$$m'_x = \frac{R'_x I^2 t}{c\Delta\theta} = \frac{12 \times 10^{-2} \times 3600}{4180 \times 45} = 2,29 \times 10^{-3} \text{ kg}.$$

E 4.42. Un cub alcătuit din 12 rezistențe egale cu R_0 așezate pe fiecare latură este alimentat de la o tensiune de curent continuu prin două colțuri opuse așezate pe diagonala cubului.

Rezistența R_0 o socotim echivalentă cu rezistența care rezultă prin înlocuirea dielectricului de cuarț al unui condensator, cu oțel încălzit la 120°C . Se dau: capacitatea condensatorului $0,16 \mu\text{F}$; $\epsilon_r = 5$; $\rho_0 = 0,1 \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$; coeficientul de temperatură al rezistenței $\alpha = 0,006 \text{ grd}^{-1}$. Se cere să se calculeze:

- Rezistența oțelului la 120°C .
- Rezistența R_0 .
- Rezistența totală a cubului.
- Considerînd că oțelul se răcește în timp după o variație liniară astfel că la 120°C ajunge după 20 minute la 20°C se cere să se determine care este temperatura după 5 minute.
- Valoarea curentului I care trece prin rezistența totală a cubului pentru ca temperatura finală și timpul să fie cele de la punctul d), considerînd că masa rezistențelor este 200 g și căldura specifică de $0,11 \text{ cal/g}\cdot\text{grd}$. [16].

Rezolvare. Pentru primul punct se folosește relația ce dă valoarea rezistenței la o anumită temperatură, respectiv

$$R_{120} = R_0(1 + \alpha t) \quad (1)$$

Problema conține informația ce dă posibilitatea scrierii lui R_0

$$R_0 = \rho_0 \frac{d}{S} \quad (2)$$

unde ρ_0 este rezistivitatea oțelului la 0°C ; d —lungimea conductorului de oțel egală cu distanța dintre armăturile condensatorului; S —secțiunea conductorului egală cu suprafața armăturilor condensatorului.

Deoarece din formula ce dă capacitatea unui condensator plan rezultă că

$$\frac{d}{S} = \frac{\varepsilon}{C} \quad (3)$$

formula (1) devine

$$R_{120} = \rho_0 \frac{\varepsilon}{C} (1 + \alpha t) = \frac{0,1 \times 10^{-6} \times 8,856 \times 10^{-12} \times 5}{0,16 \times 10^{-6}} \times \\ \times (1 + 0,006 \times 120) = 47,7 \times 10^{-12} \Omega.$$

b) Rezistența la 0°C este

$$R_0 = \rho_0 \frac{\varepsilon}{C} = \frac{R_{120}}{1 + \alpha t} = \frac{47,7 \times 10^{-12}}{1 + 0,006 \times 120} = 27,8 \times 10^{-12} \Omega.$$

Pentru punctul c) al problemei (vezi aplicarea teoremelor lui Kirchhoff — E 3.66) pag. 313 — la calculul rezistenței echivalente) se obține

$$R_{ech} = \frac{5}{6} R_0 = \frac{5}{6} \times 27,8 \times 10^{-12} = 23,2 \times 10^{-12} \Omega.$$

Pentru punctul d) se poate scrie relația analitică ce dă variația liniară a temperaturii în timp sub forma

$$\theta = At + B \quad (4)$$

unde θ este temperatura, t —timpul, A și B sînt coeficienți ce se deduc din următoarele condiții la limite, care constituie informații date în enunț:

pentru $t = 0$; $\theta = 20^\circ\text{C}$ rezultă $B = 120$

pentru $t = 1200$ s; $\theta = 20^\circ\text{C}$ rezultă $A = -\frac{1}{30}$.

Relația (4) devine deci

$$\theta = -\frac{t}{30} + 120.$$

d) După 5 minute temperatura va scădea la valoarea

$$\theta_5 = -\frac{300}{12} + 120 = -25 + 120 = 95^\circ\text{C}$$

Valoarea curentului I cerut de punctul e) al problemei se obține din egalitatea

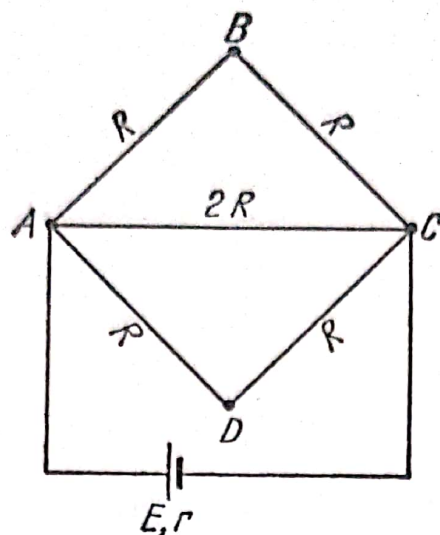
$$\frac{5}{6} R_0 I^2 t = mc \Delta \theta$$

respectiv

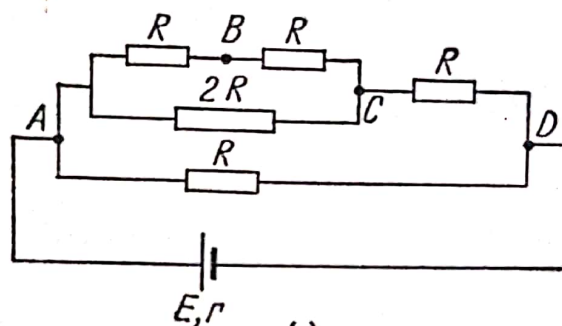
$$I = \sqrt{\frac{mc \Delta \theta}{\frac{5}{6} R_0 t}} = \sqrt{\frac{200 \times 10^{-3} \times 0,11 \times 4,18 \times 100}{\frac{5}{6} \times 27,8 \times 10^{-12} \times 1200}} = 1,52 \times 10^4 \text{ A.}$$

E 4.43. Un circuit electric $ABCD$ este alimentat de mai multe elemente galvanice identice, fiecare avînd tensiunea electromotoare $E = 6 \text{ V}$ și rezistența internă $r = 2 \Omega$. Fiecare latură a circuitului are aceeași rezistență R , iar diagonala AC are rezistența $2R$ (fig. E 4.43, a). Se cere:

a) să se determine valoarea rezistenței R , dacă intensitatea curenților care trec prin fiecare ramură nu se schimbă la legarea în serie sau în paralel a generatoarelor.



a)



b)

Fig. E 4.43

b) Să se determine curenții care străbat fiecare ramură a circuitului în cazul în care se folosesc $n = 5$ elemente galvanice.

c) Se modifică rezistența întregului circuit în cazul în care sursele ar fi conectate între A și D ?

d) care este diferența de potențial între mijloacele conductoarelor AB și BC ? [16]

Rezolvare. a) Se calculează rezistența echivalentă a rezistoarelor din circuitul exterior

$$R_e = \frac{8R^3}{12R^2} = \frac{2}{3} R. \quad (1)$$

Se calculează intensitățile curenților pentru cazul în care generatoarele sînt legate:

$$\text{— în serie } I_s = \frac{nE}{\frac{2}{3} R + nr}.$$

$$\text{— în paralel } I_p = \frac{E}{\frac{2}{3}R + \frac{r}{n}}.$$

Din egalitatea lui I_p cu I_s rezultă

$$\frac{nE}{\frac{2}{3}R + nr} = \frac{E}{\frac{2}{3}R + \frac{r}{n}}.$$

Efectuînd operațiile algebrice ce se impun se obține succesiv

$$\frac{2}{3}R + nr = \frac{2}{3}Rn + r$$

$$\frac{2}{3}R(1 - n) = r(1 - n);$$

se obține

$$R = \frac{3}{2}r = \frac{3}{2}2 = 3 \Omega.$$

b) Intensitatea I a curentului în circuitul principal se obține cu una din cele două relații care dau pe I_s sau I_p

$$I = I_p = \frac{E}{\frac{2}{3}R + \frac{r}{n}} = \frac{6}{\frac{2}{3}3 + \frac{2}{5}} = 2,5 \text{ A.}$$

Printr-o ramură a circuitului trece un curent

$$I_R = \frac{I}{3} = \frac{2,5}{3} = 0,83 \text{ A.}$$

c) În cazul în care sursele sînt conectate între A și D aplicînd metoda transfigurării se obține circuitul de rezistoare din figura E 4.43, b a cărei rezistență echivalentă este

$$R_e = \frac{2R^2}{3R} = \frac{2}{3}R \quad (2)$$

Comparînd valoarea găsită cu cea de la punctul a) se constată că aceasta nu se schimbă.

d) Diferența de potențial dintre mijloacele conductoarelor AB și BC este

$$U = \frac{U_{AC}}{2} = \frac{2RI_R}{2} = RI_R = \frac{3}{2} 2 \times \frac{2,5}{3} = 2,5 \text{ V.}$$

E 4.44. Un conductor vertical cu un capăt pus la pămînt are lungimea $l = 30 \text{ m}$ și capacitatea electrică proprie $C = 100 \text{ pF}$.

a) Se cere să se calculeze inductanța proprie corespunzătoare antenei; 2) Sub acțiunea unei descărcări electrice atmosferice, antena este străbătută de un curent constant de intensitate $I = 100 \text{ A}$.

b) Cunosînd rezistența electrică a antenei $R = 1 \Omega$ și capacitatea sa calorică $k = 120 \text{ J/}^\circ\text{C}$ se cere să se calculeze timpul în care temperatura antenei crește cu $\Delta \theta = 100^\circ\text{C}$;

c) Cu cît variază lungimea de undă a antenei datorită încălzirii de mai sus? Se cunoaște coeficientul de dilatare liniară $\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

d) Se cere să se calculeze intensitatea cîmpului electric omogen în conductor.

e) La ce distanță r de conductor și spre ce punct cardinal, cîmpul magnetic creat de curent ce trece prin antenă egalează componenta orizontală a cîmpului magnetic terestru care are valoarea $H_0 = 16 \text{ A/m}$?

(Universitatea București, iulie, 1970)

Rezolvare. a) Se știe că lungimea de undă corespunzătoare unei antene de tipul din problemă este dată de relația

$$\lambda = 4l = 2\pi c \sqrt{LC}$$

unde c este viteza de propagare a oscilațiilor electromagnetice egală cu $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, L —inducția proprie a antenei, C —capacitatea proprie a antenei. Din această relație rezultă

$$L = \frac{4l^2}{\pi^2 c^2 C} = \frac{4 \times 900}{\pi^2 \times 9 \times 10^{16} \times 100 \times 10^{-12}} \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ H.}$$



b) Din egalitatea cantităților de căldură produsă de curentul electric ce parcurge conductorul și înmagazinată de conductor rezultă

$$RI^2t = mc\Delta\theta, \text{ unde } mc = k$$

de unde rezultă

$$t = \frac{k\Delta\theta}{RI^2} = \frac{120 \times 100}{1 \times 100^2} = 1,2 \text{ s.}$$

c) Variația lungimii de undă este proporțională cu variația lungimii conductorului, după cum arată relația

$$\Delta\lambda = 4\Delta l = 4l\alpha\Delta\theta = 4 \times 30 \times 10^{-5} \times 100 = 0,12 \text{ m}$$

d) Intensitatea câmpului electric omogen în conductor se obține din relația

$$E = \frac{\rho}{S} I = \frac{R}{l} I = \frac{1}{30} 100 = 3,3 \text{ V/m.}$$

e) Pentru determinarea lui r se egalează valoarea componentei orizontale a intensității câmpului magnetic terestru cu intensitatea magnetică a câmpului creat de conductor parcurs de curent; se găsește astfel

$$r = \frac{I}{2\pi H_0} = \frac{100}{2\pi 16} = 1 \text{ m.}$$

Deoarece curentul din conductor se scurge dinspre capătul liber spre pământ, ținând seama de regula burghiului se ajunge la concluzia că intensitatea câmpului magnetic terestru este anulată de existența câmpului magnetic creat de conductor la distanța de 1 m spre est de axa conductorului.

E 4.45. Un circuit oscilant este format dintr-un conductor cu capacitatea de 1 pF și o bobină elastică cu lungimea de 9 cm, diametrul de 2 cm, cu 10 spire și avînd coeficientul de elasticitate $k = 1 \text{ N/m}$. Circuitul fiind așezat ca în figura E 4.45, la capătul bobinei putem așeza greutatea F , pînă la limita de elasticitate care corespunde unei forțe de $16 \cdot 10^{-2} \text{ N}$.

a) Care va fi lungimea de undă a oscilațiilor emise de acest circuit (se ia $\pi^2 = 10$)?

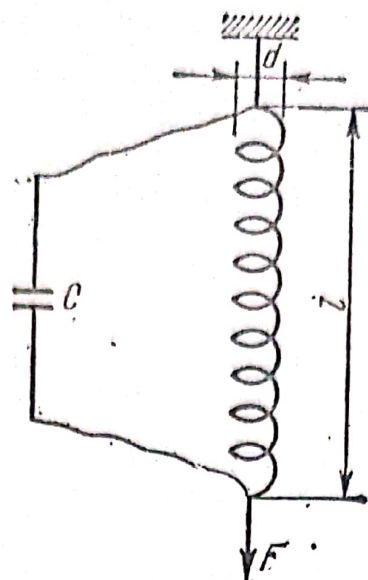


Fig. E 4.45

b) Să se exprime lungimea de undă funcție de greutatea F .

c) Considerînd dispozitivul ca o balanță, se cere să i se determine sensibilitatea medie, adică raportul $\frac{\Delta\lambda}{\Delta F}$ în domeniul indicat. [15, 4/67]

Rezolvare. Se rezolvă direct punctul b) al problemei deoarece a) este un caz particular.

Ținînd seama că sub acțiunea forței F variază lungimea bobinei, și deci și inductanța acesteia, lungimea de undă a oscilațiilor circuitului este

$$\lambda = 2\pi c \sqrt{LC} = 2\pi c \sqrt{\frac{\mu_0 N^2 S}{l + \Delta l} C} \quad (1)$$

unde c este viteza de propagare a undelor electromagnetice egală cu $3 \cdot 10^8$ m/s, L -inductanța bobinei circuitului oscilant, C -capacitatea condensatorului aceluiași circuit, N -numărul de spire al bobinei, S -secțiunea bobinei, l -lungimea bobinei, Δl -alungirea bobinei sub sarcina F . Deoarece $\Delta l = \frac{F}{k}$ formula (1) devine

$$\begin{aligned} \lambda &= 2\pi c \sqrt{\frac{\mu_0 N^2 S}{l + F/k} C} = 2\pi \times 3 \times 10^8 \times \\ &\times \sqrt{\frac{4\pi 10^{-7} \times 10^2 \times 4 \times 10^{-4} \pi \times 10^{-12}}{4(9 \times 10^{-2} + F)}} = \frac{1,2\pi}{\sqrt{9 + 100F}} \end{aligned}$$

Deoarece $F \in [0; 0,16 \cdot 10^{-2}\text{N}]$, lungimea de undă între aceste limite este:

— pentru $F = 0$

$$\lambda_{\max} = \frac{1,2\pi}{3} = 1,256 \text{ m}$$

— pentru $F = 16 \cdot 10^{-2}\text{N}$

$$\lambda_{\min} = \frac{1,2\pi}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{1,2}{5} = 0,24 \text{ m.}$$

c) Sensibilitatea medie a balanței este dată de formula

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta F} = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{F - F_0} = \frac{0,503}{16 \times 10^{-2}} = \frac{50,3}{16} = 3,15 \text{ m/N.}$$

4.7. Tipul al șaselea: probleme test

Acest tip de problemă se folosește pentru verificarea cunoștințelor teoretice și aplicative dobândite la un anumit capitol sau la o anumită etapă de pregătire într-un anumit domeniu. Asemenea probleme reclamă cunoașterea amănunțită atât a noțiunilor teoretice (proprietăți, mărimi, fenomene, legi etc.) cât și a modului de rezolvare a problemelor din capitolul la care se referă (formule, relații, metode de calcul etc.).

Aceste probleme au de obicei un enunț scurt și conțin unele chei de rezolvare ce constau în cunoașterea exactă a unor definiții, a domeniului de aplicare a unor relații, a unor formule mai puțin folosite etc.

În general acest tip de problemă nu reclamă calcule numerice greoaie, lungi, ele putând fi rezolvate din minte, rezultatele fiind de obicei numere întregi.

În vederea verificării gradului de pregătire al celui ce și-a însușit un capitol al unei discipline, a parcurs o etapă mai lungă (mai multe capitole) sau care este examinat asupra unei întregi discipline, i se propun spre rezolvare mai multe asemenea probleme, numărul depinzând de gradul lor de dificultate aparentă, de timpul afectat verificării, de importanța acesteia în cadrul general de pregătire (extemporal, teză, lucrare de control, examen etc.).

Problemele de tip test pot fi astfel întocmite încît răspunsul să fie foarte simplu, rezumîndu-se la un da sau nu, la indicarea unui rezultat numeric sau a unei soluții din mai multe prezentate drept răspuns, la demonstrarea unor relații stabilite pe altă cale decît cea învățată etc.

Cîteva exemple de asemenea probleme sînt prezentate în cele ce urmează.

E 4.46. Un corp este lăsat să cadă, fără viteză inițială, cu frecare de coeficient μ , pe două plane înclinate de un unghi α și β în raport cu orizontala, racordate în O .

Între poziția inițială A și cea finală B există distanțele H (pe verticală) și D (pe orizontală).

Se cere să se arate că $H = \mu D$ (fig. E 4.46).

Rezolvare. Se aplică metoda energiei între pozițiile A și B

$$\Delta E + \Delta \Pi = L_f, \quad \Delta E = 0, \quad \Delta \Pi = -mgH$$

$$L_f = -\mu mg \cos \alpha \cdot AO - \mu mg \cos \beta \cdot OB = -\mu mg D.$$

Rezultă

$$-mgH = -\mu mg D \Rightarrow H = \mu D.$$

E 4.47. Se cere să se reprezinte grafic, fără nici un calcul, variația în timp a vitezei unui mobil care se mișcă pe un plan orizontal, cu frecare, între doi pereți verticali (fig. E 4.47, a)

Corpul este lansat inițial cu viteza v_0 orientată spre dreapta, din vecinătatea peretelui din stînga.

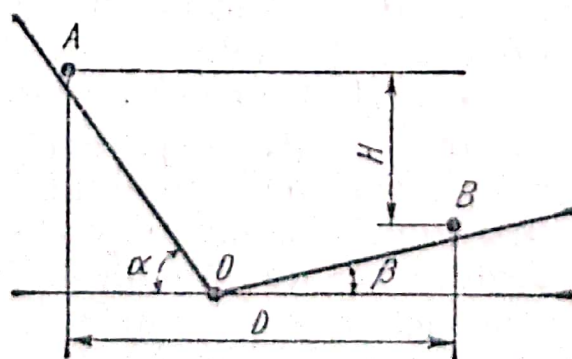


Fig. E 4.46

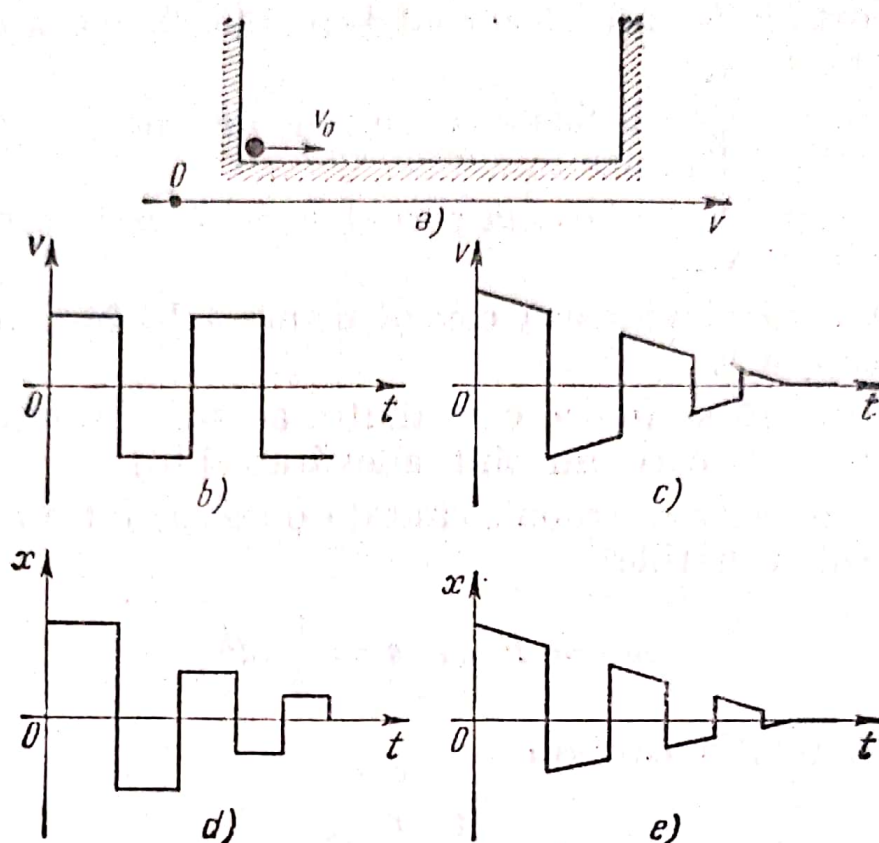


Fig. E 4.47

Vitezele se vor considera pozitive atunci când sînt orientate spre dreapta.

În ceea ce privește frecarea dintre corp și planul orizontal, precum și ciocnirile dintre corp și cei doi pereți verticali se vor considera succesiv cazurile:

- a) $\mu = 0$ (fără frecare); $k = 1$ (ciocniri elastice)
- b) $\mu \neq 0$ (cu frecare); $k = 1$ (ciocniri elastice)
- c) $\mu = 0$ (fără frecare); $k \in (0,1)$ (ciocniri elasto-plastice)
- d) $\mu \neq 0$ (cu frecare); $k \in (0,1)$ (ciocniri elasto-plastice)

Rezolvare. Reprezentările grafice cerute sînt arătate în fig. E 4.47, b, c, d și e.

E 4.48. Leonardo da Vinci a făcut următoarele afirmații:

Dacă forța F deplasează corpul de masă m în timpul t pe distanța s , atunci:

- a) forța F deplasează corpul de masă $m/2$ în timpul t pe distanța $2s$;

b) forța F deplasează corpul de masă $m/2$ în timpul $t/2$ pe distanța s ;

c) forța $F/2$ deplasează corpul de masă $m/2$ în timpul t pe distanța s ;

d) forța $F/2$ deplasează corpul de masă m în timpul t pe distanța $s/2$;

e) forța F deplasează corpul de masă $2m$ în timpul $2t$ pe distanța s .

Se cere să se indice care dintre aceste afirmații sînt adevărate și care nu sînt adevărate [16].

Rezolvare. Trebuie căutată o relație între F , m , t și s . Din ecuațiile

$$ma = F \text{ și } s = \frac{1}{2} at^2$$

rezultă relația căutată

$$s = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2. \quad (1)$$

Înlocuind pe rînd valorile menționate în textul problemei vom spune că afirmația respectivă este adevărată dacă relația (1) nu se modifică. Înlocuirile cerute de text sînt prezentate sinoptic în tabelul următor:

Afirmația Înlocuirea	a	b	c	d	e
	F	F	$\frac{F}{2}$	$\frac{F}{2}$	F
m	$\frac{m}{2}$	$\frac{m}{2}$	$\frac{m}{2}$	m	$2m$
t	t	$t/2$	t	t	$2t$
s	$2s$	s	s	$s/2$	s

Rezultă:

$$a) \quad 2s = \frac{1}{2} \frac{F}{\frac{m}{2}} t^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 \quad \text{adevărat};$$

$$b) \quad s = \frac{1}{2} \frac{F}{\frac{m}{2}} \left(\frac{t}{2}\right)^2 \Rightarrow s = \frac{1}{4} \frac{F}{m} t^2 \quad \text{neadevărat};$$

$$c) \quad s = \frac{1}{2} \frac{\frac{F}{2}}{\frac{m}{2}} t^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 \quad \text{adevărat};$$

$$d) \quad \frac{s}{2} = \frac{1}{2} \frac{\frac{F}{2}}{m} t^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 \quad \text{adevărat};$$

$$e) \quad s = \frac{1}{2} \frac{F}{2m} (2t)^2 \Rightarrow s = \frac{F}{m} t^2 \quad \text{neadevărat}.$$

E 4.49. Cinci *elemente fizice* liniare identice (rezistoare, condensatoare, arcuri) caracterizate fiecare prin constanta A_i sînt legate între ele ca în figura E 4.49.

Se poate arăta că întregul sistem este echivalent cu un singur element de constantă A_e , denumită *constantă echivalentă* a sistemului inițial.

Se cere să se determine această constantă în cazurile în care elementele 1, ..., 5 sînt respectiv:

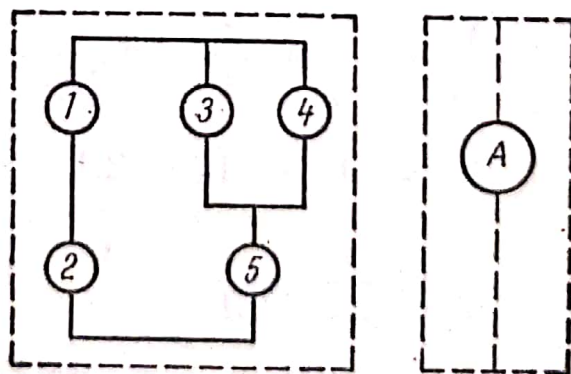


Fig. E 4.49

a) rezistoare (A reprezintă rezistența ohmică a rezistoarelor)

b) condensatoare (A reprezintă capacitatea condensatoarelor)

c) arcuri (A reprezintă constanta elastică a arcurilor).

Rezolvare. Pentru calculul constantei echivalente se folosesc următoarele două formule

$$A_e = \sum A_i = nA \quad (1)$$

$$\frac{1}{A_e} = \sum \frac{1}{A_i} = \frac{n}{A} \Rightarrow A_e = \frac{A}{n}. \quad (2)$$

În cazul a) se aplică pentru legarea în serie formula (1) și pentru legarea în paralel formula (2) avem

$$A_{12} = A_1 + A_2 = 2A$$

$$\frac{1}{A_{34}} = \frac{1}{A_3} + \frac{1}{A_4} = \frac{2}{A} \Rightarrow A_{34} = \frac{A}{2}$$

$$A_{345} = A_{34} + A_5 = \frac{A}{2} + A = \frac{3A}{2}$$

$$\frac{1}{A_{12345}} = \frac{1}{A_e} = \frac{1}{A_{12}} + \frac{1}{A_{345}} = \frac{1}{2A} + \frac{2}{3A} = \frac{7}{6A}.$$

Rezultă

$$A_e = \frac{6}{7} A.$$

$$b) \quad \frac{1}{A_{12}} = \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} = \frac{2}{A} \quad A_{12} = \frac{A}{2}$$

$$A_{34} = A_3 + A_4 = 2A$$

$$\frac{1}{A_{345}} = \frac{1}{A_{34}} + \frac{1}{A_5} = \frac{1}{2A} + \frac{1}{A} = \frac{3}{2A} \quad A_{345} = \frac{2}{3} A$$

$$A_{12345} = A_e = A_{12} + A_{345} = \frac{A}{2} + \frac{2}{3} A = \frac{7}{6} A.$$

Observatie. Toate schemele serie, paralel și serie-paralel care se pot efectua cu trei, patru, cinci și șase dipoli (rezistoare, capacități sau resoarte) sînt prezentate în tabelele 4.1, 4.2, 4.3 și 4.4. Pentru simplificarea calculelor s-a determinat valoarea constantei echivalente a sistemului numai pentru cazul cînd dipolii respectivi au constante egale.

Aceste scheme pot constitui tot atîtea probleme test pe care cititorul se poate antrena în vederea obținerii cît mai rapide a rezultatelor corecte.

Valorile din tabelă pot servi spre verificarea calculelor literale atunci cînd schema respectivă conține dipoli de constante distincte.

TABELA 4.1.

SCHEME CU TREI DIPOLI

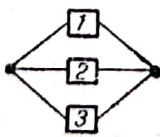
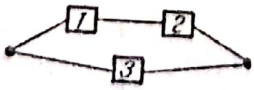
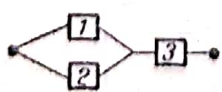
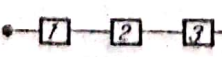
Nr. crt.	Figura	Valorile factorului $\lambda = \frac{k_e}{k} (k_i = k)$	
		Rezistoare	Capacități
1.		$\frac{1}{3} = 0,33$	3
2.		$\frac{2}{3} = 0,66$	$\frac{3}{2} = 1,5$
3.		$\frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{2}{3} = 0,66$
4.		3	$\frac{1}{3} = 0,33$

TABELA 4.2.

SCHEME CU PATRU DIPOLI

Nr. ert.	Figura	Valorile factorului $\lambda = \frac{k_e}{k} (k_i = k)$	
		Rezistoare	Capacități
1.		$\frac{1}{4} = 0,25$	4
2.		$\frac{2}{5} = 0,4$	$\frac{5}{2} = 2,5$
3.		$\frac{3}{5} = 0,6$	$\frac{5}{3} = 1,66$
4.		$\frac{3}{4} = 0,75$	$\frac{4}{3} = 1,33$
5.		1	1
6.		$\frac{4}{3} = 1,33$	$\frac{3}{4} = 0,75$
7.		$\frac{5}{3} = 1,66$	$\frac{3}{5} = 0,6$
8.		1	1
9.		$\frac{5}{2} = 2,5$	$\frac{2}{5} = 0,4$
10.		4	$\frac{1}{4} = 0,25$

TABELA 4.3.

SCHEME CU CINCI DIPOLI

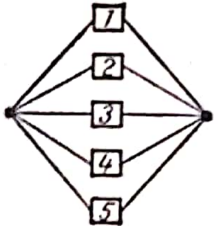
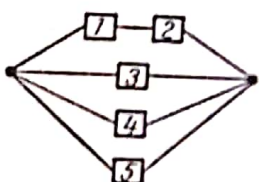
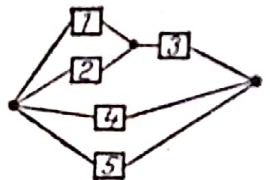
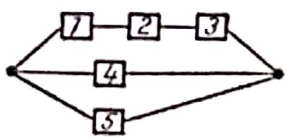
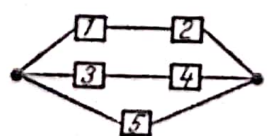
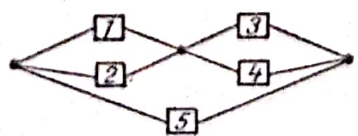
Nr. crt.	Figura	Valorile factorului $\lambda = \frac{k_e}{k} (k_i = k)$	
		Rezistoare	Capacități
1	2	3	4
1.		$\frac{1}{5} = 0,2$	5
2.		$\frac{2}{7} = 0,285$	$\frac{7}{2} = 3,5$
3.		$\frac{3}{8} = 0,37$	$\frac{8}{3} = 2,66$
4.		$\frac{3}{7} = 0,42$	$\frac{7}{3} = 2,33$
5.		$\frac{1}{2} = 0,5$	2
6.		$\frac{1}{2} = 0,5$	2

TABELA 4.3. (continuare)

Nr. crt.	Figura	Valorile factorului $\lambda = \frac{k_c}{k}$ ($k_i = k$)	
		Rezistoare	Capacități
1	2	3	4
7.		$\frac{4}{7} = 0,57$	$\frac{7}{4} = 1,75$
8.		$\frac{5}{8} = 0,62$	$\frac{8}{5} = 1,6$
9.		$\frac{5}{7} = 0,71$	$\frac{7}{5} = 1,4$
10.		$\frac{4}{5} = 0,8$	$\frac{5}{4} = 1,25$
11.		$\frac{5}{6} = 0,83$	$\frac{6}{5} = 1,2$
12.		$\frac{6}{7} = 0,86$	$\frac{7}{6} = 1,16$
13.		$\frac{7}{6} = 1,16$	$\frac{6}{7} = 0,86$
14.		$\frac{6}{5} = 1,2$	$\frac{5}{6} = 0,83$
15.		$\frac{5}{4} = 1,25$	$\frac{4}{5} = 0,8$

TABELA 4.3. (continuare)

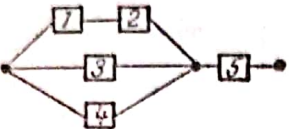
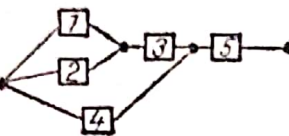
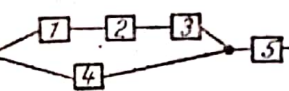
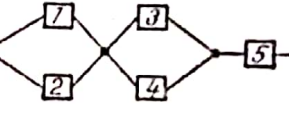
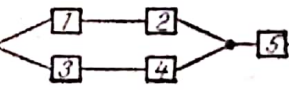
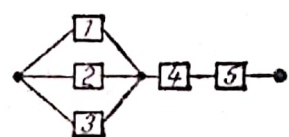
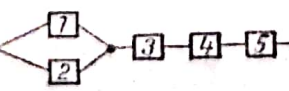
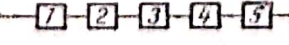
Nr. ert.	Figura	Valorile factorului $\lambda = \frac{k_e}{k} (k_i = k)$	
		Rezistoare	Capacități
1	2	3	4
16.		$\frac{7}{5} = 1,4$	$\frac{5}{7} = 0,71$
17.		$\frac{8}{5} = 1,6$	$\frac{5}{8} = 0,62$
18.		$\frac{7}{4} = 1,75$	$\frac{4}{7} = 0,57$
19.		2	$\frac{1}{2} = 0,5$
20.		2	$\frac{1}{2} = 0,5$
21.		$\frac{7}{3} = 2,33$	$\frac{3}{7} = 0,42$
22.		$\frac{8}{3} = 2,66$	$\frac{3}{8} = 0,37$
23.		$\frac{7}{2} = 3,5$	$\frac{2}{7} = 0,285$
24.		5	$1/5 = 0,2$

TABELA 4.4.

SCHEME CU ȘASE DIPOLI

Nr. ert.	Figura	Valorile factorului $\lambda = \frac{k_o}{k} (k_i = k)$	
		Rezistoare	Capacități
1.		$\frac{1}{6} = 0,166$	6
2.		$\frac{3}{11} = 0,27$	$\frac{11}{3} = 3,66$
3.		$\frac{6}{13} = 0,46$	$\frac{13}{6} = 1,17$
4.		$\frac{3}{10} = 0,3$	$\frac{10}{3} = 3,33$
5.		$\frac{1}{3} = 0,33$	3

TABELA 4.4. (continuare)

Nr. crt.	Figura	Valorile factorului $\lambda = \frac{k_e}{k} (k_i = k)$	
		Rezistoare	Capacități
6.		$\frac{1}{3} = 0,33$	3
7.		$\frac{1}{3} = 0,33$	3
8.		$\frac{4}{11} = 0,36$	$\frac{11}{4} = 2,75$
9.		$\frac{5}{13} = 0,37$	$\frac{13}{5} = 2,6$
10.		$\frac{5}{12} = 0,41$	$\frac{12}{5} = 2,4$
11.		$\frac{4}{9} = 0,44$	$\frac{9}{4} = 2,22$
12.		$\frac{5}{11} = 0,45$	$\frac{11}{5} = 2,2$

TABELA 4.4. (continuare)

Nr. crt.	Figura	Valorile factorului $\lambda = \frac{k_e}{k} (k_i = k)$	
		Rezistoare	Capacități
13.		$\frac{9}{10} = 0,9$	$\frac{10}{9} = 1,11$
14.		$\frac{6}{11} = 0,54$	$\frac{11}{6} = 0,83$
15.		$\frac{5}{9} = 0,55$	$\frac{9}{5} = 1,8$
16.		$\frac{11}{7} = 1,57$	$\frac{7}{11} = 0,63$
17.		$\frac{7}{12} = 0,58$	$\frac{12}{7} = 1,71$
18.		$\frac{8}{13} = 0,61$	$\frac{13}{8} = 1,625$
19.		$\frac{7}{13} = 0,54$	$\frac{13}{7} = 1,86$

TABELA 4.4. (continuare)

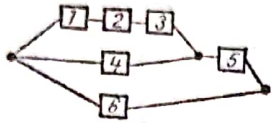
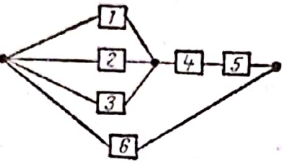
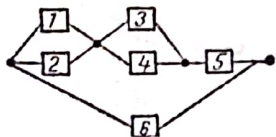
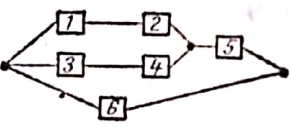
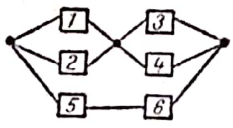
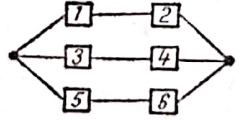
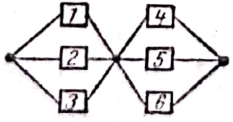
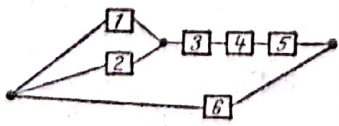
Nr. ert.	Figura	Valorile factorului $\lambda = \frac{k_p}{k} (k_i = k)$	
		Rezistoare	Capacități
20.		$\frac{7}{11} = 0,636$	$\frac{11}{7} = 1,57$
21.		$\frac{7}{10} = 0,7$	$\frac{10}{7} = 1,43$
22.		$\frac{2}{3} = 0,67$	$\frac{3}{2} = 1,5$
23.		$\frac{2}{3} = 0,67$	$\frac{3}{2} = 1,5$
24.		$\frac{2}{3} = 0,67$	$\frac{3}{2} = 1,5$
25.		$\frac{2}{3} = 0,67$	$\frac{3}{2} = 1,5$
26.		$\frac{2}{3} = 0,67$	$\frac{3}{2} = 1,5$
27.		$\frac{7}{9} = 0,77$	$\frac{9}{7} = 1,28$

TABELA 4.4. (continuare)

Nr. ert.	Figura	Valorile factorului $\lambda = \frac{k_e}{k} (k_i = k)$	
		Rezistoare	Capacități
28.		$\frac{3}{4} = 0,75$	$\frac{4}{3} = 1,33$
29.		$\frac{4}{5} = 0,8$	$\frac{5}{4} = 1,25$
30.		$\frac{5}{6} = 0,833$	$\frac{6}{5} = 1,2$
31.		$\frac{10}{11} = 0,9$	$\frac{11}{10} = 1,1$
32.		1	1
33.		$\frac{11}{10} = 1,1$	$\frac{10}{11} = 0,9$
34.		$\frac{6}{5} = 1,2$	$\frac{5}{6} = 0,83$
35.		$\frac{5}{4} = 1,25$	$\frac{4}{5} = 0,8$

TABELA 4.4. (continuare)

Nr. crt.	Figura	Valorile factorului $\lambda = \frac{k_e}{k} (k_i = k)$	
		Rezistoare	Capacități
36.		$\frac{9}{7} = 1,28$	$\frac{7}{9} = 0,77$
37.		$\frac{4}{3} = 1,33$	$\frac{3}{4} = 0,75$
38.		$\frac{4}{3} = 1,33$	$\frac{3}{4} = 0,75$
39.		$\frac{11}{8} = 1,37$	$\frac{8}{11} = 0,72$
40.		$\frac{11}{8} = 1,37$	$\frac{8}{11} = 0,72$
41.		$\frac{11}{8} = 1,37$	$\frac{8}{11} = 0,72$
42.		$\frac{10}{7} = 1,42$	$\frac{7}{10} = 0,7$
43.		$\frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{2}{3} = 0,67$
44.		$\frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{2}{3} = 0,67$

TABELA 4.4. (continuare)

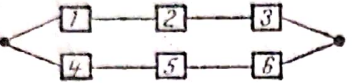
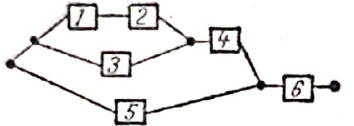
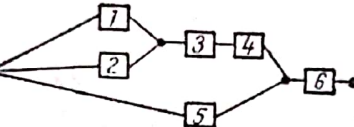
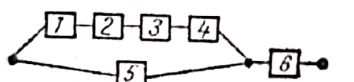
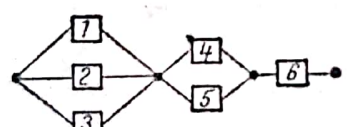
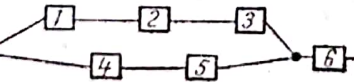
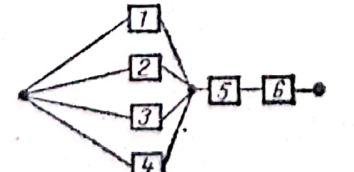
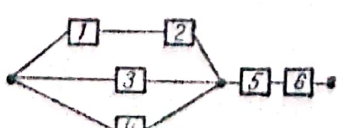
Nr. crt.	Figura	Valorile factorului $\lambda = \frac{k_e}{k} (k_i = k)$	
		Rezistoare	Capacități
45.		$\frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{2}{3} = 0,67$
46.		$\frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{2}{3} = 0,67$
47.		$\frac{13}{8} = 1,62$	$\frac{8}{13} = 0,61$
48.		$\frac{12}{7} = 1,71$	$\frac{7}{12} = 0,58$
49.		$\frac{9}{5} = 1,8$	$\frac{5}{9} = 0,55$
50.		$\frac{11}{6} = 1,83$	$\frac{6}{11} = 0,54$
51.		$\frac{11}{5} = 2,2$	$\frac{5}{11} = 0,45$
52.		$\frac{9}{4} = 2,25$	$\frac{4}{9} = 0,44$
53.		$\frac{12}{5} = 2,4$	$\frac{5}{12} = 0,41$

TABELA 4.4. (continuare)

Nr. ert.	Figura	Valorile factorului $\lambda = \frac{k_e}{k} (k_i = k)$	
		Rezistoare	Capacități
54.		$\frac{13}{5} = 2,6$	$\frac{5}{13} = 0,38$
55.		$\frac{13}{6} = 2,17$	$\frac{6}{13} = 0,46$
56.		$\frac{11}{4} = 2,75$	$\frac{4}{11} = 0,36$
57.		3	$\frac{1}{3} = 0,33$
58.		3	$\frac{1}{3} = 0,33$
59.		$\frac{10}{3} = 3,33$	$\frac{3}{10} = 0,3$
60.		$\frac{11}{3} = 3,66$	$\frac{3}{11} = 0,27$
61.		$\frac{9}{2} = 4,5$	$\frac{2}{9} = 0,22$
62.		$\frac{2}{9} = 0,22$	$\frac{9}{2} = 4,5$
63.		6	$\frac{1}{6} = 0,166$

E 4.50. O bulă de aer se ridică de la fundul unui lac la suprafață mărindu-și volumul cu n %. Ce adâncime are lacul? Se dau $p_0 = 10^5 \text{ N/m}^2$, $g = 10 \text{ m/s}$, $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Rezolvare. Are loc transformarea izotermică a aerului din bulă între cele două stări (la adâncime și la suprafață); avem

$$(p_0 + \rho gh)v_0 = p_0 \left(v_0 + \frac{n}{100} v_0 \right).$$

Rezultă

$$h = \frac{np_0}{100\rho g} = \frac{n \times 10^5}{100 \times 10^3 \times 10} = 0,1 n.$$

Spre exemplu, dacă volumul bulei crește cu 20 % lacul are adâncimea $h = 2 \text{ m}$.

E 4.51. Se consideră circuitul alcătuit din două surse de curent avînd t.e.m. E și rezistența internă R , legate ca în figura E 4.51, a.

Se cere să se arate ce tensiune indică un voltmetru legat între punctele A și B ale acestui circuit. [9]

Rezolvare. Din aplicarea celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff rezultă (fig. E 4.51, b)

$$2E = 2RI, \text{ de unde } I = \frac{E}{R}.$$

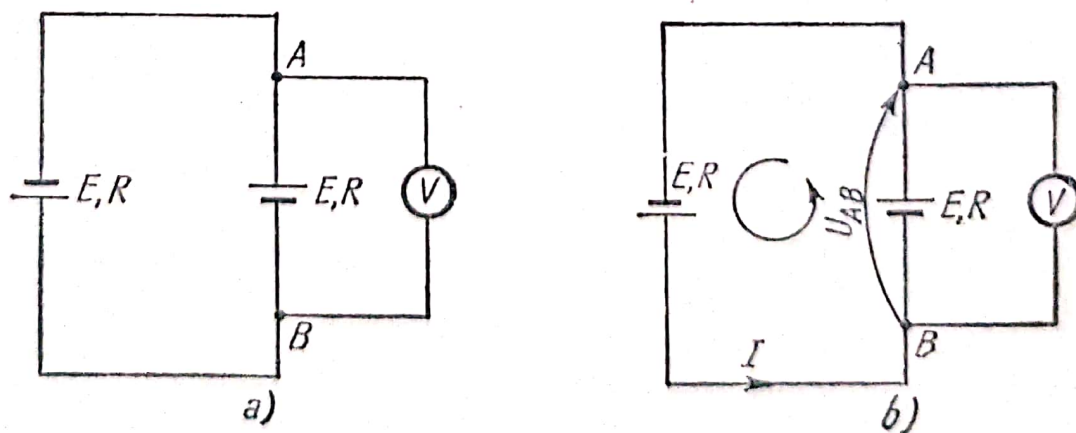


Fig. E 4.51

Aplicînd legea lui Ohm generalizată laturii de circuit AB rezultă

$$U_{AB} + E = RI$$

de unde

$$U_{AB} = RI - E = \frac{ER}{R} - E = 0.$$

Concluzie: căderea de tensiune între punctele A și B este nulă.

E 4.52. Să se calculeze rezistența echivalentă a rețelei din figura E 4.52, a.

Rezolvare. Deoarece toate rezistențele circuitului sînt de valori egale și circuitul este de două ori simetric $U_{CD} = 0$, deci rețeaua se poate reduce la cea din fig. E 4.52, b, a cărei rezistență echivalentă este

$$R = \frac{16r^2}{8r} = 2r.$$

E 4.53. Fie două circuite oscilante L_1C_1 și L_2C_2 în rezonanță. Se construiește un al treilea circuit oscilant

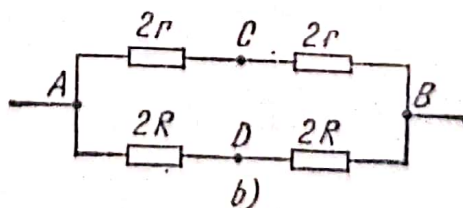
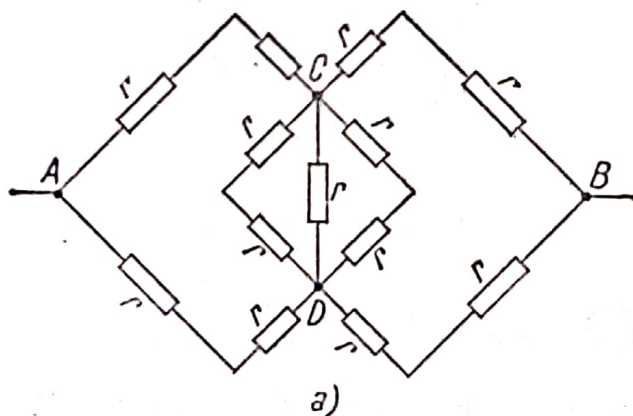


Fig. E 4.52

care să cuprindă inductoarele L_1 și L_2 și capacitățile C_1 și C_2 legate în serie. Se cere să se demonstreze că perioada proprie de oscilație a acestui circuit este identică cu perioadele T_1 și T_2 ale circuitelor inițiale [15,4/69].

Rezolvare. La rezonanță există relația

$$L_1 C_1 = L_2 C_2$$

care se poate scrie

$$\frac{L_1}{C_2} = \frac{L_2}{C_1} \quad (1)$$

Problema cere să se demonstreze că

$$\frac{L_1 + L_2}{C_1 + C_2} C_1 C_2 = L_1 C_1 = L_2 C_2 \quad (2)$$

din (1) rezultă

$$\frac{L_1}{C_2} = \frac{C_1}{L_2} = \frac{L_1 + L_2}{C_1 + C_2}. \quad (3)$$

Introducând una din egalitățile din (3) în (2) se obține

$$\frac{L_1}{C_2} C_1 C_2 = L_1 C_1$$

sau

$$\frac{L_1}{C_2} C_1 C_2 = L_1 C_1$$

ceea ce trebuie de demonstrat.

E 4.54. Se dă montajul din figura E 4.54. Să se arate că $I_1 = I'_1$ și $I_2 = I'_2$. [15]

Rezolvare. Căderea de tensiune între punctele A și C este

$$U_{AC} = R_1 I_1 + R_2 I'_2 = R_2 I_2 + R_1 I'_1$$

de unde rezultă

$$R_1 (I_1 - I'_1) = R_2 (I_2 - I'_2). \quad (1)$$

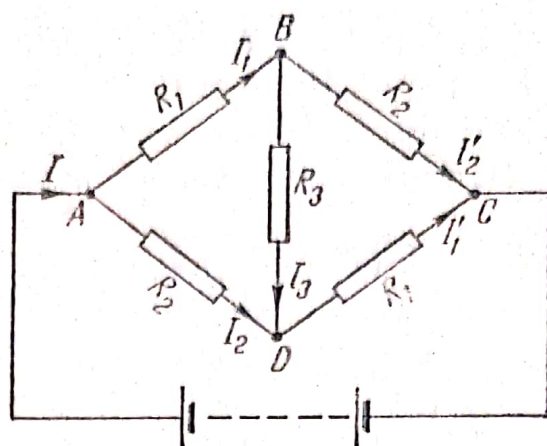


Fig. E 4.54

În nodurile A și C se poate scrie relația

$$I_1 + I_2 = I'_1 + I'_2 \quad (2)$$

sau

$$I_1 - I'_1 = I_2 - I'_2 \quad (3)$$

Înlocuind (3) în (1) se obține

$$R_1(I_2 - I'_2) - R_2(I_2 - I'_2) =$$

sau

$$(R_1 - R_2)(I_2 - I'_2) = 0$$

de unde rezultă $I_2 - I'_2 = 0$ sau $I_2 = I'_2$.

Din (3) rezultă că și

$$I_1 - I'_1 = 0 \Rightarrow I_1 = I'_1.$$

E. 4.55. Două sfere metalice A și B, goale în interior, sînt dispuse concentric (fig. E 4.55) sfera A fiind

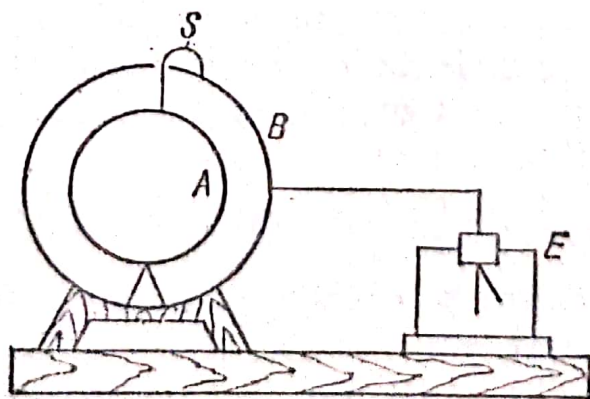


Fig. E 4.55

izolată de sfera exterioară B . Printr-o deschizătură mică a sferei B , prin intermediul sîrmei S , putem pune în contact cele două sfere. Sfera B este electrizată, gradul ei de electrizare fiind arătat de deviația foitei electoscopului E .

Considerînd sfera A fără sarcină electrică, cum va fi deviația foitei, mai mare sau mai mică, dacă prin sîrma S vom pune în contact cele două sfere? [8].

Răspuns. Punînd în legătură cele două sfere potențialul lor este același și nu există deplasare de sarcini electrice între cele două sfere. În consecință foita electoscopului rămîne nedeviată.

E 4.56. Cîți litri de hidrogen se formează la 25°C și 756 torr, dacă se trece printr-o soluție de acid sulfuric, timp de 40 minute, un curent de 60 A.

Rezolvare. Soluția 1. Aplicînd legea generală a gazelor se obține

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

Înlocuind în această relație

$$m = \frac{1}{F} \frac{A}{n} It$$

se obține

$$V = \frac{AItRT}{pFMn} = \frac{1 \times 60 \times 40 \times 60 \times 8,317 \times 298}{756 \times 13,59 \times 9,8 \times 96500 \times 2 \times 1} = 1,84 \times 10^{-2} \text{ m}^3 = 1,84 \text{ dm}^3.$$

Soluția 2. Se știe că pentru obținerea unei mase de un gram este necesară trecerea prin soluție a unei cantități de electricitate de 96500 coulombi.

Cantitatea de electricitate ce trece prin soluție în condițiile problemei este

$$Q = It = 60 \times 40 \times 60 = 144\,000 \text{ coulombi.}$$

Această cantitate de electricitate depune deci o masă de hidrogen egală cu

$$m = \frac{144\,000}{96\,500} = 1,493 \text{ g.}$$

Deci legea generală a gazelor se obține

$$V = \frac{mRT}{Mp} = \frac{1,493 \times 8,317 \times 298}{2 \times 756 \times 13,59 \times 9,8} = 1,84 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

E 4.57. Să se calculeze intensitatea câmpului magnetic generat în centrul cercului cu raza egală cu 1 m pe care se mișcă un electron de sarcină egală cu $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, cu o viteză unghiulară de $1,5\pi \cdot 10^9 \text{ rad/s}$. Cercul este situat într-un plan normal pe liniile unui câmp magnetic.

Rezolvare. Din definiție rezultă că intensitatea curentului electric produs de mișcarea electronului în câmpul magnetic este

$$I = ev = 1,6 \times 10^{-19} \frac{1,5 \times \pi \times 10^9}{2\pi} = 1,2 \times 10^{-10} \text{ A.}$$

Intensitatea câmpului magnetic se obține din relația

$$H = \frac{I}{2r} = \frac{1,2 \times 10^{-10}}{2 \times 1} = 0,6 \times 10^{-10} \text{ A/m} = 60 \text{ p A/m.}$$

E 4.58. O baterie de acumulatori alimentează o cuvă cu apă acidulată. La descărcarea bateriei se obține o cantitate de gaz detonant care, prin ardere, ar furniza 35 % din energia cheltuită pentru încărcarea bateriei. Dacă în locul unei cuve cu apă acidulată am lega în serie mai multe asemenea cuve, evident ar fi necesar un timp mai lung pentru a trece aceeași cantitate de electricitate ca mai înainte. Dar după legile lui Faraday, cantitatea de substanță depusă depinde numai de cantitatea de electricitate care a trecut prin electrolit. De aceea, chiar și într-un interval de timp mai lung în fiecare cuvă va apărea aceeași cantitate de gaz detonant ca în prima parte a experienței. Atunci, prin arderea întregii cantități de gaz detonant (dezvoltat de toate cuvele) s-ar obține o cantitate de energie mult mai mare decât cea obținută la încărcarea acumulatorilor, ceea ce contrazice legea conservării energiei.

Să se explice paradoxul.

(Concurs de fizică, etapa republicană, clasa XI, 1969).

Rezolvare. Dacă se ia în considerație și t.c.e.m. a unei cuve, atunci intensitatea curentului prin circuit este

$$I = \frac{n_1 E_1 - n_2 E_c}{n_1 r + n_2 R} \quad (1)$$

unde n_1 -numărul acumulatorilor din baterie, E_1 -t.e.m. a unui acumulator ≈ 2 V, n_2 -numărul cuvelor electrolitice legate în serie, E_c -t.c.e.m. a unei cuve (pentru apă acidulată $\approx 1,5$ V), r -rezistența interioară a unui acumulator.

Din relația (1) rezultă că problema este posibilă numai pentru

$$n_1 E_1 > n_2 E_c.$$

E 4.59. Se cere să se determine tensiunile U_1 și U_2 corespunzătoare condensatorilor C_1 și C_2 din figura E 4.59. Se dau $E_1 = 12$ kV, $E_2 = 13$ kV, $C_1 = 3 \mu\text{F}$, $C_2 = 7 \mu\text{F}$. Se neglijează conductivitatea dielectricilor. [16].

Rezolvare. Aplicînd cea de a doua teoremă a lui Kirchhoff acestui circuit considerînd ca sens de parcurs al circuitului sensul acelor unui ceasornic se obține relația

$$E_1 - U_1 + E_2 - U_2 = 0. \quad (1)$$

Deoarece sarcinile pe cei doi condensatori sînt identice rezultă relația

$$C_1 U_1 = C_2 U_2. \quad (2)$$

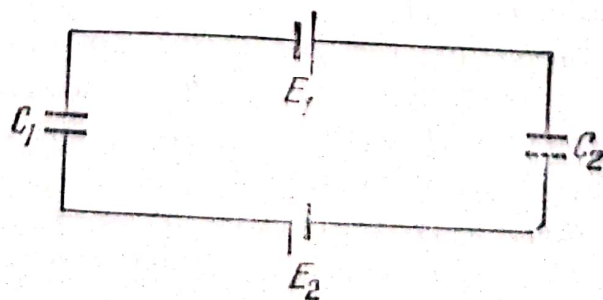


Fig. E 4.59

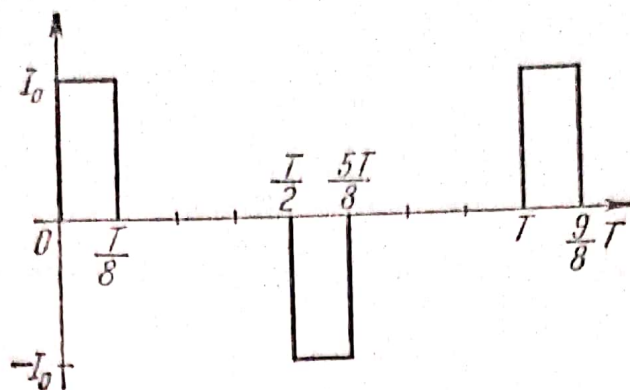


Fig. E 4.60

Rezolvînd sistemul format de cele două ecuații (1) și (2) se obține

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} (E_1 + E_2) = \frac{7}{7 + 3} (12 + 13) = 17,5 \text{ kV}$$

$$U_2 = \frac{1}{C_1 + C_2} (E_1 + E_2) = \frac{3}{7 + 3} (12 + 13) = 7,5 \text{ kV}.$$

E 4.60. Se cere să se determine mărimea efectivă a unui curent alternativ care variază în modul următor (fig. E. 4.60) [16]:

$$I = I_0 \text{ când } 0 < t < \frac{T}{8}$$

$$I = 0 \text{ când } \frac{T}{8} < t < \frac{T}{2}$$

$$I = -I_0 \text{ când } \frac{T}{2} < t < \frac{5}{8} T$$

$$I = 0 \text{ când } \frac{5}{8} T < t < T$$

$$I = I_0 \text{ când } T < t < \frac{9}{8} T.$$

Rezolvare. Valoarea efectivă a curentului alternativ se definește ca fiind egală cu valoarea curentului continuu care produce același efect caloric în același interval de timp.

Dacă ne referim la o perioadă (T) atunci curentul alternativ dat produce un efect caloric egal cu

$$Q = RI_0^2 \frac{T}{8} + RI_0^2 \frac{T}{8} = RI_0^2 \frac{T}{4}.$$

Curentul efectiv produce același efect într-o perioadă respectiv

$$Q = RI^2 T.$$

Egalînd cele două cantități de căldură se obține

$$I = \frac{I_0}{2}.$$

E 4.61. Se cere să se determine capacitatea C_e pentru o baterie de condensatori identici de capacitate C montați ca în figura E 4.61, a [16].

Rezolvare. Prin transfigurare se obține schema echivalentă din fig. E 4.61, b. Se observă că diferența de potențial la bornele condensatorului C_3 este nulă și deci existența acestuia nu influențează capacitatea echivalentă a bateriei, care se poate calcula ca și când acesta n-ar exista.

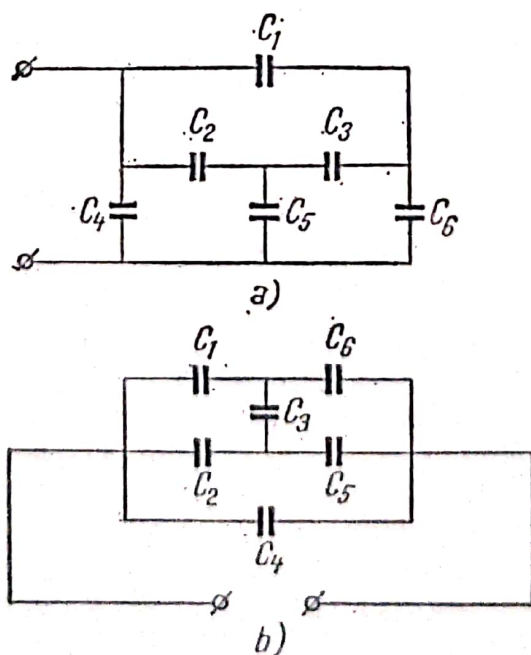


Fig. E 4.61

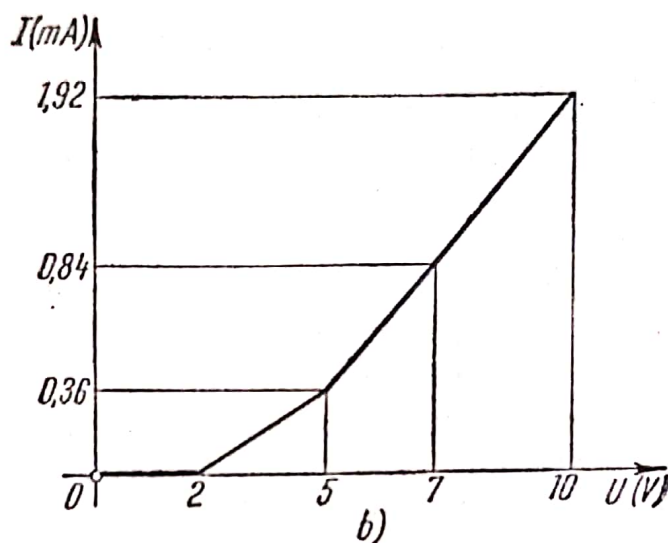
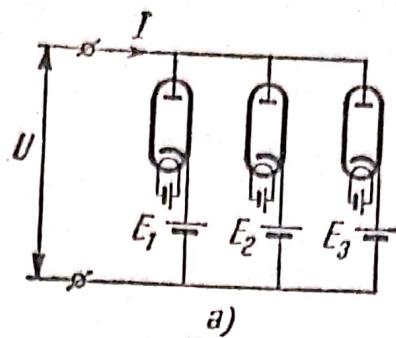


Fig. E 4.62

Rezultă astfel capacitatea echivalentă a bateriei:

$$C_0 = \frac{C}{2} + \frac{C}{2} + C = 2C.$$

E 4.62. Trei diode ale căror caracteristici anodice pot fi aproximativ reprezentate de porțiuni de linii drepte: $I_a = 0$ la $U_a \leq 0$; $I_a = kU_a$ la $U_a > 0$; unde $k = 0,12$ mA/V, sînt conectate ca în circuitul din figura E 4.62, a. Se cere să se reprezinte într-o diagramă dependența curentului I din circuit ca funcție de tensiunea U , dacă $E_1 = 2V$, $E_2 = 5V$, $E_3 = 7V$ și U variază de la $-10V$ la $+10V$. [16]

Rezolvare. Dioda 1 va conduce curentul cînd $U_a > 0$ respectiv pentru $U > E_1$, dioda 2 pentru $U > E_2$ și dioda 3 pentru $U > E_3$.

În consecință reprezentarea grafică a curentului anodic în funcție de tensiunea U este cea din figura

E 4.62, b, legile de variație ale acestuia pentru diversele valori ale lui U fiind:

pentru $U \leq E_1$	$I = 0$
pentru $E_1 \leq U \leq E_2$	$I = k(U - E_1)$
pentru $E_2 \leq U \leq E_3$	$I = k(U - E_1) + k(U - E_2) = k(2U - E_1 - E_2)$
pentru $E_3 \leq U$	$I = k(U - E_1) + k(U - E_2) + k(U - E_3) = k(3U - E_1 - E_2 - E_3)$

E 4.63. În practică pentru măsurarea capacității unui condensator în curent alternativ cu frecvența de 50 Hz, se utilizează un montaj format din condensatorul de studiat, un ampermetru și un voltmetru. Precizia se mărește, dacă se înlocuiește condensatorul cu o rezistență variabilă, care se reglează astfel, încât ampermetrul și voltmetrul să indice aceleași valori ca în primul caz. Se cere să se calculeze capacitatea condensatorului știind că $R = 40 \text{ } \Omega$ și rezistența ampermetrului este $R_a = 60 \text{ } \Omega$. [15, 2/68]

Rezolvare. Montajul elementelor schemei cuprinzând ampermetrul, voltmetrul și condensatorul este cel din figura E 4.63, a.

Pentru acest montaj se poate scrie relația

$$I = \frac{U}{\sqrt{R_a^2 + \frac{1}{(C\omega)^2}}} \quad (1)$$

unde U este tensiunea la bornele circuitului măsurată de voltmetru, I — intensitatea curentului prin circuitul ampermetru-condensator, R_a — rezistența ampermetrului, C — capacitatea condensatorului, ω — pulsația curentului alternativ.

Montajul elementelor schemei în partea a doua a problemei este cel din figura E 4.63, b; ținând seama de condițiile problemei se poate scrie relația

$$I = \frac{U}{R_a + R} \quad (2)$$

R fiind valoarea rezistenței variabile.

Împărțind (1) cu (2) rezultă

$$\frac{R_a + R}{\sqrt{R_a^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} = 1$$

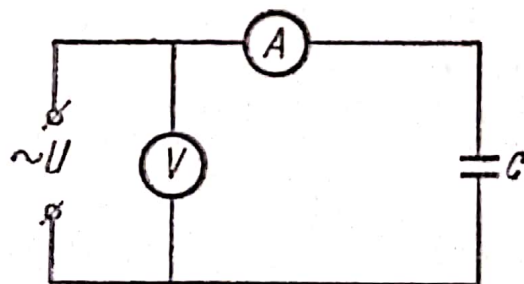
de unde

$$C = \frac{1}{\omega \sqrt{(R_a + R)^2 - R_a^2}} = \frac{1}{314 \sqrt{(100^2 - 60^2)}} = \frac{1}{25\,120} \text{ F.}$$

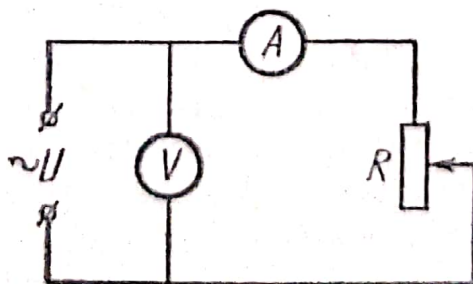
Precizia măsurătorii crește deoarece aceasta este independentă de citirea și precizia celor două aparate de măsură.

Se menționează că în ambele montaje s-a considerat rezistența voltmetrului ca avînd o valoare foarte mare și deci intensitatea curentului ce-l străbate ca fiind neglijabilă față de aceea care circulă prin circuitul conținînd ampermetrul.

E 4.64. Un motor de curent continuu cu excitație independentă dezvoltă o putere mecanică $P = 160 \text{ W}$ avînd o tensiune la borne $U = 120 \text{ V}$. Rotorul se învîrte cu $n = 10 \text{ rot/s}$. Se cere să se determine turația maximă



a)



b)

Fig. E 4.63

a motorului la această tensiune. Rezistența rotorului este $R = 20 \, \Omega$. [16]

Rezolvare. Din informațiile problemei se pot scrie relațiile

$$U = E_c + RI \quad (1)$$

$$E_c = kn \quad (2)$$

$$U = kn' \quad (3)$$

Relația (3) corespunde mersului în gol al motorului. E_c este tensiunea contraelectromotoare, I —intensitatea curentului prin circuit, n' —turația maximă a motorului, k —constanta constructivă a motorului.

Înmulțind cu I , relația (1) devine

$$UI = P + RI^2 \text{ respectiv } 120 I = 160 + 20 I^2$$

de unde rezultă

$$I_1 = 2A \text{ și } I_2 = 4A.$$

Din (1) rezultă

$$E_{c1} = 120 - 20 \times 2 = 80 \text{ V și}$$

$$E_{c2} = 120 - 20 \times 4 = 40 \text{ V.}$$

Din (2) și (3) rezultă

$$\frac{E_c}{U} = \frac{n}{n'}$$

de unde

$$n'_1 = \frac{nU}{E_{c1}} = \frac{10 \times 120}{80} = 15 \text{ rot/min}$$

$$n'_2 = n \frac{U}{E_{c2}} = \frac{10 \times 120}{40} = 30 \text{ rot/min}$$

E 4.65. În punctele A și B se găsesc două sarcini punctiforme $+Q$ și $-Q$ așa cum se vede în figura E 4.65, a. Lângă aceste sarcini punctiforme este așezată o roțiță cu patru brațe, avînd fiecare la capete cîte o biluță încărcată cu sarcini pozitive egale.

Se va putea învîrți roțița sau nu?

(Concurs european de fizică în memoria lui Einstein, Hamburg, 1968)

Rezolvare. Ținînd seama de simetria de încărcare electrică pe care o au biluțele roțiței în raport cu dreapta

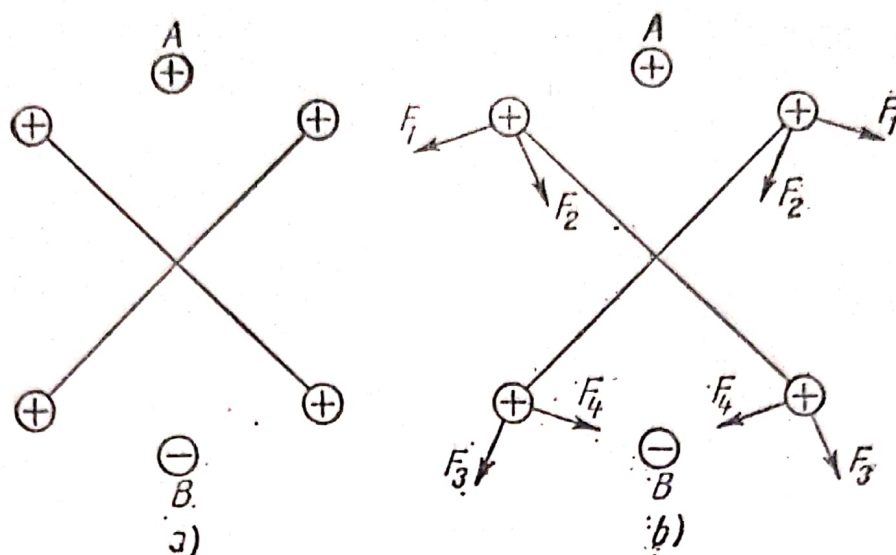


Fig. E 4.65

care unește sursele punctiforme A și B, forțele electrostatice ce rezultă din interacțiunea acestora cu cele ale surselor punctiforme din A și B sînt și ele simetrice și deci roțița nu se poate învîrți (fig. E 4.65, b). Pe figură n-au fost reprezentate forțele ce rezultă din interacțiunea dintre sarcinile biluțelor, de asemenea simetrice și care mențin roțița în echilibru.

4.8. Concluzii

Din prezentarea clasificării tipurilor de probleme de fizică pe criteriul gradului de dificultate, rezultă utilitatea acesteia pentru modul de rezolvare a problemelor, pentru modul de a învăța sau îndruma pregătirea în domeniul fizicii.

Este de observat faptul că această clasificare pe tipuri restrînge domeniul de căutare a soluției. Astfel din enunțul problemei rezultă capitolul de fizică la care se referă problema în totalitate sau punctul din problemă a cărui rezolvare se urmărește. Apoi din datele enunțului, din analiza schemei ce rezultă din legarea elementelor prezentate în enunț, precum și din necunoscutele cerute, se face apel fie la o formulă, fie la o variantă de formulă cunoscută sau care urmează să fie stabilită, fie la una sau mai multe metode aparținînd capitolului respectiv.

Se identifică astfel tipul de problemă și implicit modul de rezolvare, procedînd așa cum s-a arătat mai sus, fie prin folosirea formulelor, relațiilor și metodelor cunoscute, fie prin comparație cu alte probleme de același tip rezolvate anterior.

În ceea ce privește modul de a învăța sau îndruma însușirea fizicii, prima concluzie ce se poate trage este aceea că pentru a învăța să rezolvăm o problemă de fizică este necesară o trecere gradată de la rezolvarea de probleme simple de primul tip la probleme cu grad de dificultate din ce în ce mai ridicat.

Nu se poate realiza o pregătire de calitate în minimum de timp, decît urmînd această cale.

Lucrările din acest domeniu apărute pînă în prezent păcătuiesc într-o mai mare sau mai mică măsură, unele cuprinzînd în general probleme din primele tipuri, altele mai ales probleme din ultimele tipuri prezentate în lucrarea de față.

O a doua concluzie ce se impune este aceea că este necesar ca manualele școlare, mai ales cele din ultimii ani, să cuprindă un capitol cu lecții de sinteză și probleme recapitulative, cu un grad mai mare de dificultate, de tipurile patru și cinci. Această parte ar avea scopul să lege între ele, diversele capitole cuprinse în manual, arătînd elevului că, în realitate, fenomenele fizice nu sînt izolate unul de altul ci că acestea se condiționează reciproc.

În fine, pentru verificarea rapidă a gradului de pregătire după o etapă de lucru sau în preajma unor examene sînt foarte utile problemele de tip test care pot oglindi atît gradul de pregătire teoretică și aplicativă, cît și rapiditatea cu care trebuie operat în rezolvarea unei probleme.



Autorii, cadre didactice cu experiență îndelungată în învățământul superior, au alcătuit o carte originală, ca urmare a unui bogat material adunat în cursul anilor și a cunoașterii programelor de învățământ ce s-au cerut la examenele de admitere în facultăți. Concepută ca un gen de metodică — dar nu în sensul strict didactic — cartea se caracterizează printr-o îmbinare reușită a teoriei cu practica.

Vol. I și Vol. II 14,50 lei